РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
2025, том 12, выпуск 2, с. 42–51

КОСМИЧЕСКИЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ПРИБОРЫ. РАДИОЛОКАЦИЯ И РАДИОНАВИГАЦИЯ

УДК 629.78 EDN HXBYOJ

Методы высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений

А. Н. Подкорытов, *к. т. н., доцент, contact@spacecorp.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Российская Федерация

А. А. Поваляев, *д. т. н., профессор, povalyaev_aa@spacecorp.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация

Аннотация. В статье рассматриваются математические понятия и основанная на них общая теория решения задач высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений (целочисленное ВАМО).

В англоязычной литературе известны несколько методов решения данных задач — в них используются различные эмпирические алгоритмы обработки, не связанные общей теорией. Проведен обзор существующих методов, указаны их особенности и недостатки.

Общая теория может быть построена на том, что математически задача целочисленного ВАМО всегда сводится к решению системы линеаризованных уравнений, где часть переменных оценивается как целые числа. Данная система является недоопределенной, то есть имеет бесконечное множество решений. Методами теории векторных пространств выявлено особое свойство такой системы: оценки части переменных в бесконечном множестве ее решений остаются неизменными. К числу этих переменных относятся поправки к грубым координатам потребителя.

В предлагаемой общей теории решения задач целочисленного ВАМО используются выявленное свойство систем линейных уравнений в задачах целочисленного ВАМО, а также методы решения систем линейных уравнений при условии целочисленных ограничений на часть переменных. Приведены результаты практического применения предложенных методов высокоточного местоопределения.

Авторами показано, что для ионосферосвободной модели измерений было достигнуто мгновенное разрешение неоднозначности и сантиметровый уровень точности местоопределения с первой эпохи обработки. При использовании модели измерений на исходных частотах сантиметровый уровень точности был достигнут через 2–3 минуты обработки 30-секундных измерений.

Ключевые слова: высокоточное абсолютное местоопределение, разрешение неоднозначности, исходные частоты измерений, псевдофазовые измерения

Для цитирования: Подкорытов А. Н., Поваляев А. А. Методы высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений. *Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы*. 2025. Т. 12. № 2. С. 42–51.

РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
2025, том 12, выпуск 2, с. 42–51

Methods of Precise Point Positioning in GNSS with Integer Ambiguity Resolution of Phase Measurements

A. N. Podkorytov, *Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, contact@spacecorp.ru*
Joint Stock Company “Russian Space Systems”, Moscow, Russian Federation
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

A. A. Povalyaev, *Dr. Sci. (Engineering), Professor, povalyaev_aa@spacecorp.ru*
Joint Stock Company “Russian Space Systems”, Moscow, Russian Federation
Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

Abstract. The paper deals with mathematical concepts and the general theory of problem solution of precise point positioning (PPP) in GNSS with integer ambiguity resolution of phase measurements (integer PPP).

Several methods of solving these problems are known in the English-language literature. They use various empirical processing algorithms that are not related to the general theory. The existing methods are reviewed, and their peculiarities and disadvantages are stated.

The general theory can be built on the fact that mathematically the problem of integer PPP always reduces to solving a system of linearized equations, where some of the variables are evaluated as integers. This system is underdetermined, that is, it has infinitely many solutions. The methods of a vector space theory reveal a special property of such a system: the estimates of a part of variables in the infinite set of its solutions remain unchanged. These variables include corrections to the coarse coordinates of a user.

The proposed general theory of problem solution of integer PPP uses the revealed property of linear equation systems in the integer PPP problems, as well as the methods of solving systems of linear equations subject to integer constraints on a part of variables. The results of practical application of the proposed methods of PPP are given.

The authors show that for the ionosphere-free observation model, instantaneous ambiguity resolution was achieved and the centimeter level of error was reached from the first processing epoch. When using the observation model with raw observations, the centimeter level of accuracy was achieved after 2–3 minutes of processing of 30-second observations.

Keywords: precise point positioning (PPP), ambiguity resolution, raw observations, phase measurements

For citation: Podkorytov A. N., Povalyaev A. A. Methods of Precise Point Positioning in GNSS with Integer Ambiguity Resolution of Phase Measurements. *Rocket-Space Device Engineering and Information Systems*. 2025. Vol. 12. No. 2. P. 42–51. (in Russian)

Введение

В статье рассматриваются математические понятия и основанная на них общая теория решения задач высокоточного абсолютного местоопределения в глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС) с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений (задачи целочисленного ВАМО).

Задача целочисленного ВАМО делится на пользовательскую (задача потребителя) и сетевую задачи (сетевое решение). В пользовательской задаче на основе обработки формируемых в навигационной аппаратуре потребителя (НАП) измерений псевдодальностей и псевдофаз с использованием корректирующих спутниковых поправок определяются абсолютные координаты НАП с ошибками порядка 1–3 см. В сетевой задаче обрабатываются двухчастотные измерения псевдодальностей и псевдофаз станций наземной сети с точно известными координатами и вычисляются корректирующие поправки к показаниям спутниковых часов, которые передаются в НАП по какому-либо каналу связи. В качестве корректирующих поправок к местоположению спутников в задачах целочисленного ВАМО могут использоваться орбитальные спутниковые поправки, применяемые в методах ВАМО без разрешения неоднозначности (действительное ВАМО, англ. PPP, float PPP, Precise point positioning [1]).

Обзор литературы

К настоящему времени в англоязычной литературе опубликовано большое число статей, посвященных обработке измерений псевдодальностей и псевдофаз в режиме целочисленного ВАМО (англ. PPP-AR или Integer PPP) [2–11]. Все указанные статьи можно разделить на три группы.

Первая группа статей [2, 3] написана совместно сотрудниками Немецкого центра исследования Земли в Потсдаме (GFZ, GeoForschungsZentrum), сотрудниками Уханьского университета в Китае (Wuhan University) и сотрудниками Института инженерной и космической геодезии Ноттингемского университета в Великобритании (University of Nottingham). В этих статьях описывается так называемый Fractional Cycle Bias-подход (FCB-подход или метод оценки смещений в измерениях на дольную часть цикла). В данном подходе используются первые межспутниковые разности измерений и не используются высокоэффективные вычислительные методы реализации процедуры разрешения целочисленной неоднозначности.

Вторая группа статей [4–7] написана сотрудниками французского национального центра космических исследований (CNES, National Centre for Space Studies) в Тулузе. В этих статьях описывается так называемый Integer Recovery Clock-подход (IRC-подход или метод целочисленного восстановления показаний часов). В данном подходе также не используются высокоэффективные вычислительные методы реализации процедуры разрешения целочисленной неоднозначности.

Третья группа статей [8–11] написана совместно сотрудниками геодезического подразделения Министерства природных ресурсов Канады (NRCan, Natural Resources Canada) и сотрудниками Йоркского университета (York University) в Торонто. В этих статьях описывается так называемая модель разделенных часов Decoupled clock model (DC-подход или метод разделенных часов).

Все вышеперечисленные методы обладают следующими основными недостатками:

1. Могут быть использованы только при обработке измерений, формируемых по сигналам ГНСС с кодовым разделением (GPS, Galileo, BDS). Они неприменимы к измерениям, формируемым по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением.
2. В основе лежат различные эмпирические алгоритмы обработки, не связанные между собой какой-либо общей математической теорией. Это затрудняет их анализ, сравнение и совместное использование.

В русскоязычной литературе решение пользовательской задачи целочисленного ВАМО на основе использования теории S-преобразования [12] и теории решетчатых упаковок [13] по ионосферосвободным измерениям в ГНСС с кодовым разделением (ГНСС–КРК) рассмотрено в работах [14, 15].

Математическая постановка задачи целочисленного ВАМО

Общая теория обработки измерений псевдодальностей и псевдофаз в пользовательской и сетевой задачах в режиме целочисленного ВАМО может быть построена на том, что математически решение этих задач всегда сводится к решению недоопределенной системы линеаризованных алгебраических уравнений, где часть переменных оцениваются как целые числа.

В связи с громоздкостью общей теории обработки измерений псевдодальностей и псевдофаз в пользовательской и сетевой задачах в режиме целочисленного ВАМО рассмотрим далее только алгебраические детали наиболее простого случая обработки двухчастотных ионосферосвободных линейных комбинаций псевдодальностей и псевдофаз в пользовательской задаче целочисленного ВАМО по одной ГНСС–КРК. Решение такой задачи сводится к решению следующей линеаризованной системы алгебраических уравнений с $N = 7 + 2J$ неизвестными переменными:

$$\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{H}_i \cdot \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\Xi}_i, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{Y}_i$ — $3J$-вектор невязок ионосферосвободных линейных комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз; $\boldsymbol{H}_i$ — информационная матрица системы линеаризованных уравнений (1); $\boldsymbol{x}_i$ — N-вектор неизвестных переменных для пользовательской задачи в ГНСС–КРК:

$$\boldsymbol{x}_i = \big[\Delta x \;\; \Delta y \;\; \Delta z \;\; \Delta D \;\; dT_\rho \;\; dT_L \;\; bmw \;\; N1_1 \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; N1_J \;\; N_{mw1} \;\; \ldots \;\; N_{mwJ}\big]^T, \tag{2}$$

где J — число спутников, по которым в НАП проведены измерения; $\boldsymbol{\Xi}_i$ — $(N = 7 + 2J)$-вектор ошибок измерений вектора $\boldsymbol{Y}_i$; i — момент времени проведения измерений; Δx, Δy, Δz — поправки к грубым координатам потребителя; dT_ρ, dT_L — смещение ионосферосвободных кодовых и фазовых часов НАП; bmw — смещение комбинации Мельбурна–Вуббена в НАП. Неизвестные $N1_j$, N_{mwj}, $j = \overline{1, J}$ в векторе $\boldsymbol{x}_i$ (2) должны оцениваться как целые числа ($N1_j$ — целочисленные неоднозначности псевдофазовых измерений в диапазоне частот L1, $N_{mwj} = N1_j - N2_j$ — разность целочисленных неоднозначностей псевдофазовых измерений в диапазонах частот L1 и L2, $j = \overline{1, J}$). Более подробно соответствующая системе (1) модель измерений описана в [14] и [18].

Исследование свойств этой системы (1) методами теории векторных пространств показывает, что она является недоопределенной, то есть имеет бесконечное множество решений. Алгебраически это значит, что ранг r матрицы $\boldsymbol{H}_i$ системы (1) меньше числа $N = 7 + 2J$ ее неизвестных. Общая теория может быть построена на основе теории решения систем линейных алгебраических уравнений (1) с использованием теории векторных пространств и теории целочисленных решеток.

Общее свойство систем линеаризованных уравнений в пользовательской задаче целочисленного ВАМО

Бесконечное множество решений системы (1) в N-пространстве мерности $N = 7 + 2J$ произвольных значений всех неизвестных вектора $\boldsymbol{x}_i$ (2) образует подпространство. Такое подпространство, смещенное в начало системы координат N-пространства неизвестных, в теории векторных пространств называется нуль-пространством (англ. nullspace или kernel), или ядром матрицы $\boldsymbol{H}_i$ системы линеаризованных уравнений (1). Размерность ядра всегда равно недостатку ранга $d = N - r$ матрицы $\boldsymbol{H}_i$ системы линеаризованных уравнений. Для случая $N = 3$ (трехмерное пространство) и $r = 2$ бесконечное множество решений системы (1) (синяя линия) и ядро матрицы $\boldsymbol{H}_i$ (красная линия) показаны на рис. 1. Красная линия, синяя линия и проекция синей линии на плоскость yz (красная пунктирная линия) — это параллельные линии на рис. 1, при этом все три линии ортогональны оси x системы координат, а красные сплошная и пунктирная линии лежат в плоскости yz системы координат.

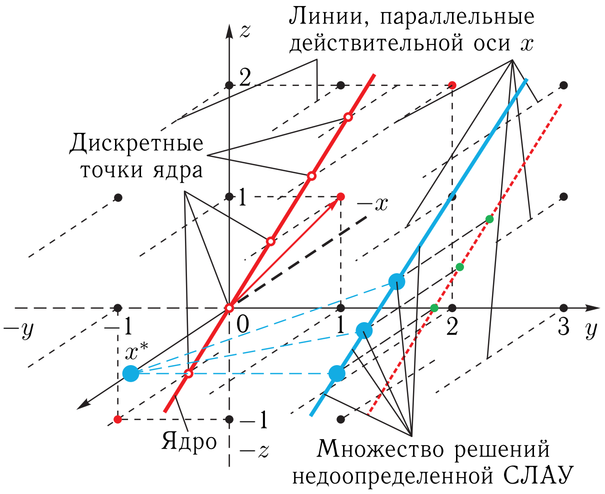

Рис. 1. Множество решений недоопределенной системы уравнений (1) (синяя линия) и ядро матрицы $\boldsymbol{H}_i$ (красная линия)

Fig. 1. A set of solutions of the underdetermined system of equations (1) (blue line) and the null space of the matrix $\boldsymbol{H}_i$ (red line)

Был найден следующий аналитический вид матрицы $\boldsymbol{V}_i$ базисных векторов ядра матрицы $\boldsymbol{H}_i$ системы линеаризованных уравнений (1):

$$\boldsymbol{V}_i = \begin{bmatrix} \underset{5\times1}{\mathbf{0}} & \underset{5\times1}{\mathbf{0}} \\ \lambda_{\Delta nifr} & \lambda_{n_2 ifr} \\ 0 & \lambda_{mw} \\ \underset{J\times1}{\mathbf{1}} & \underset{J\times1}{\mathbf{0}} \\ \underset{J\times1}{\mathbf{0}} & \underset{J\times1}{\mathbf{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{5\times1}{\mathbf{0}} & \underset{5\times1}{\mathbf{0}} \\ (n_1-n_2)\lambda_{ifr} & n_2\lambda_{ifr} \\ 0 & (n_1+n_2)\lambda_{ifr} \\ \underset{J\times1}{\mathbf{1}} & \underset{J\times1}{\mathbf{0}} \\ \underset{J\times1}{\mathbf{0}} & \underset{J\times1}{\mathbf{1}} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $\underset{J\times1}{\mathbf{1}}$ — обозначает вектор размерности J, все элементы которого равны 1; переменные $\lambda_{\Delta nifr}$, $\lambda_{n_2 ifr}$, λ_{ifr}, n_1, n_2, $\underset{J\times1}{\mathbf{0}}$ подробно описаны в [14].

Матрица $\boldsymbol{V}_i$ (3) базисных векторов ядра содержит два столбца, т. е. дефицит ранга d системы (1) всегда равен двум $d = 2$ и поэтому $N = r + 2$. Кроме того, первые 5 компонент обоих столбцов матрицы $\boldsymbol{V}_i$ (3) базисных векторов ядра равны нулю. Это означает, что ядро матрицы и, следовательно, подпространство множества решений системы (1) является ортогональным к 5 первым осям системы координат N-пространства неизвестных, вдоль которых откладываются значения переменных Δx, Δy, Δz, ΔD, dT_ρ. Следовательно, оценки переменных Δx, Δy, Δz, ΔD, dT_ρ в бесконечном множестве решений системы (1) остаются неизменными. Эти переменные мы далее будем называть несмещенными. На рис. 1 к несмещенным переменным относится x: все точки множества решений недоопределенной системы (голубая линия) имеют неизменную координату x^*.

Выявленное свойство системы линеаризованных уравнений позволяет преобразовать исходную недоопределенную систему уравнений (1) к совместной определенной системе, которая имеет единственное решение, либо к несовместной переопределенной системе, которая имеет единственное решение методом наименьших квадратов. Несмещенные неизвестные переменные в этих решениях будут оцениваться несмещенно, все остальные неизвестные переменные будут оцениваться в составе некоторых линейных комбинаций, т. е. будут оцениваться смещенно.

Преобразование исходной недоопределенной системы осуществляется путем проектирования всех точек N-пространства неизвестных $\boldsymbol{x}_i$ (2) вдоль ядра на так называемое S-подпространство, которое дополняет ядро до полного N-пространства неизвестных $\boldsymbol{x}_i$ (2) системы линеаризованных уравнений. «Вследствие этого размерность S-подпространства всегда будет равна рангу r матрицы $\boldsymbol{H}_i$ системы линеаризованных уравнений (1)» [18].

Поскольку проектирование осуществляется вдоль ядра, первые 5 компонент вектора координат любой точки N-пространства неизвестных $\boldsymbol{x}_i$ (2), в том числе и точек, лежащих в ядре, будет проектироваться на S-подпространство без изменений. Все остальные N-5 компонент векторов точек N-пространства неизвестных $\boldsymbol{x}_i$ (2) будут проектироваться на S-подпространство в виде линейных комбинаций. Но поскольку размерность векторов координат точек проекций равна N, а размерность

S-подпространства, на которое совершается проектирование, равна $r = N-2$, т. е. $r < N$, то из $N-5$ этих линейных комбинаций только $N-5-2 = N-7$ будут линейно независимыми.

Общий подход к решению задачи целочисленного ВАМО

Для получения оценки $\widehat{\boldsymbol{x}}_{s.i}$ вектора новых неизвестных $\boldsymbol{x}_{s.i}$, являющихся координатами точек проекций на S-подпространство, система линеаризованных уравнений (1) переписывается в следующем расширенном виде:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_i \\ (\boldsymbol{S}_i^{\perp})^T \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}_i + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где вектор-столбцы матрицы $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$ размерности $N \times 2$ являются ортогональными к S-подпространству (ортогональны к любому набору базисных векторов S-подпространства) и, следовательно, однозначно задают S-подпространство. Более подробно переход от (1) к (4) описан в [14].

В общем случае в (4) S-подпространство, дополняющее ядро, и, соответственно, матрицу $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$, можно выбирать произвольно. В рассматриваемом в данной работе случае для системы (1) выше были приняты целочисленные ограничения: точки N-пространства вектора $\boldsymbol{x}_i$ (2) исходных неизвестных переменных с последними $2J$ целочисленными компонентами должны проектироваться на S-подпространство так, чтобы последние $2J$ компоненты проекции также являлись целыми числами.

Такое ограничение в теории целочисленных решеток достигается, если в качестве целочисленных векторов S-подпространства выбираются векторы, дополняющие те целочисленные векторы, которые лежат в ядре $\boldsymbol{V}_i$ (3), до полного репера целочисленной решетки размерности $2J$. Под полным репером в теории целочисленных решеток понимается пучок линейно независимых взаимно простых целочисленных векторов, периодическое повторение которого задает всю целочисленную решетку.

Из матрицы базисных векторов ядра $\boldsymbol{V}_i$ (3) видно, что в ядре лежат два ортогональных целочисленных вектора. Поскольку эти целочисленные векторы ортогональны, дополнение до полного репера для этих векторов можно рассмотреть независимо друг от друга. Для этого рассмотрим первую половину первого целочисленного вектора $\begin{bmatrix} \underset{J\times 1}{\mathbf{1}} \\ \underset{J\times 1}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}$. Для этой половины дополнением являются вектор-столбцы единичной $(J \times J)$-матрицы с вычеркнутым произвольным p-м столбцом, в котором все элементы равны 0, за исключением p-го, равного 1. Далее для удобства такую усеченную единичную матрицу будем называть осколком единичной матрицы. Часть трехмерной целочисленной решетки с диагональным вектором $[1\ 1\ 1]^T$ показана на рис. 2.

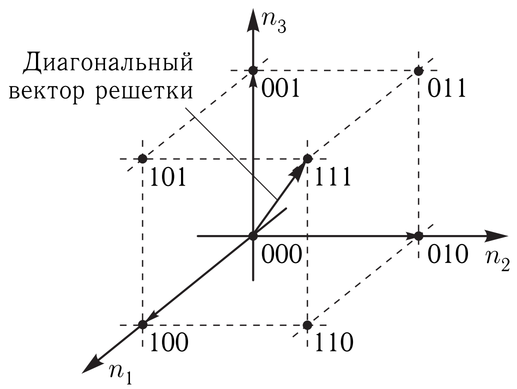

Рис. 2. Часть трехмерной целочисленной решетки с диагональным вектором $[1\ 1\ 1]^T$

Fig. 2. A part of the three-dimensional integer lattice with the diagonal vector $[1\ 1\ 1]^T$

Таким образом, целочисленная часть матрицы базисных векторов S-подпространства определяется как осколок единичной матрицы. Но для решения расширенной системы линейных уравнений (4) необходимо знать не матрицу базисных векторов S-подпространства, а $(N \times 2)$-матрицу $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$, вектор-столбцы которой ортогональны к базисным векторам S-подпространства. Этому требованию удовлетворяет $(N \times 2)$-матрица $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$ вида

$$\boldsymbol{S}_i^{\perp} = \begin{bmatrix} \underset{4\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{4\times 1}{\mathbf{0}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \underset{J\times 1}{\mathbf{1}^p} & \underset{J\times 1}{\mathbf{0}^p} \\ \underset{J\times 1}{\mathbf{0}^p} & \underset{J\times 1}{\mathbf{1}^p} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $\underset{J\times 1}{\mathbf{1}^p}$ — отброшенный столбец единичной $(J\times\times J)$-матрицы, в котором все элементы равны нулю, за исключением p-го $p=\overline{1,J}$, равного 1.

Из равенства $(\boldsymbol{S}_i^{\perp})^T\cdot\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}$ в нижней части расширенной системы уравнений (4) следует, что элементы вектора решения $\widehat{\boldsymbol{x}}_{s.i}$ этой системы, стоящие на местах в векторе неизвестных $\boldsymbol{x}_i$ (2), определяемых положением единиц в вектор-столбцах матрицы $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$ (5), должны быть равны нулю.

Иными словами элементы вектора новых оцениваемых неизвестных $\boldsymbol{x}_{i.s}$ расширенной системы (4), расположенные на местах, определяемых положением единиц в вектор-столбцах матрицы $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$ (5), являются нулевыми.

Но если заранее известно, что два элемента вектора решения $\widehat{\boldsymbol{x}}_{i.s}$ системы (4) являются нулевыми, то оценка остальных элементов вектора решений системы (4) может быть получена путем решения более простой системы линейных уравнений

$$\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{H}_{i.cmpr}\boldsymbol{x}_{i.cmpr}+\Xi_i, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{H}_{i.cmpr}$ — сжатая матрица, получаемая из исходной матрицы $\boldsymbol{H}_i$, в которой отброшены два столбца, соответствующие целочисленным неизвестным N_1^p, N_{mw}^p в исходном оцениваемом векторе $\boldsymbol{x}_i$ (2); $\boldsymbol{x}_{i.cmpr}$ — сжатый вектор оцениваемых параметров, получаемый из исходного вектора $\boldsymbol{x}_{i.s}$ новых неизвестных, в котором исключены нули. Таким образом, положение единиц в 2 столбцах матрицы $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$ (5) определяет номера 2 отбрасываемых столбцов исходной матрицы $\boldsymbol{H}_i$. При этом не только сохраняется целочисленность линейных комбинаций целочисленных неизвестных $N1_1,\ldots\ldots,N1_J,N_{1mw},\ldots,N_{Jmw}$ в оцениваемом векторе $\boldsymbol{x}_{i.cmpr}$, но и ранг сжатой матрицы $\boldsymbol{H}_{i.cmpr}$ остается равным рангу $r=5+2J_i$ исходной матрицы $\boldsymbol{H}_i$ системы (4). Таким образом, ранг сжатой матрицы $\boldsymbol{H}_{i.cmpr}$ в системе (6) равен размерности вектора $\boldsymbol{x}_{i.cmpr}$ оцениваемых неизвестных этой системы. При этом в результате решения системы линейных уравнений (6) будут найдены оценки неизвестных, указанные в векторе $\boldsymbol{x}_{i.s}$, за исключением нулевых.

Решение системы (6) с сохранением целочисленности части ее неизвестных осуществляется известными опубликованными методами [16].

Использование измерений на исходных частотах

Выше общий подход к решению задачи целочисленного ВАМО описан на примере системы (1), в которой используются ионосферосвободные линейные комбинации измерений псевдодальностей msoи псевдофаз, т. е. ионосферные задержки исключаются из числа оцениваемых переменных. Однако непосредственное оценивание ионосферных задержек при обработке измерений имеет ряд преимуществ. В [17] авторами на основе теории S-преобразования [12] с использованием описанного выше общего подхода предложено решение пользовательской задачи целочисленного ВАМО, при котором ионосферные задержки не исключаются путем образования ионосферосвободных комбинаций измерений, а включаются в число оцениваемых переменных. Поскольку ионосферные задержки в нормальных условиях меняются достаточно медленно, такой подход позволяет использовать их оценку в случае срыва слежения за спутниковым сигналом для ускорения сходимости решения при повторном вхождении в синхронизм. В [17] описаны преимущества такого подхода, его особенности. При этом используется общая модель измерений на исходных частотах, позволяющая совместно обрабатывать измерения по сигналам нескольких ГНСС как с кодовым разделением, так и с частотным разделением при использовании процедуры разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений.

Экспериментальные результаты целочисленного ВАМО

Сетевая задача целочисленного ВАМО по вычислению корректирующих поправок к смещениям показаний спутниковых часов была решена для нескольких вариантов конфигурации наземной сети станций. Навигационные приемники наземной сети станции, применяемые в сетевой задаче, должны быть однотипными (модель приемника, прошивка, используемый набор опций). При обработке измерений ГНСС с частотным разделением (ГЛОНАСС) также добавляется требование равенства кодовых аппаратурных задержек используемых

Рис. 3. Зависимость трехмерной ошибки местоопределения в пользовательской задаче целочисленного ВАМО для ионосферосвободной модели измерений и модели измерений на исходных частотах

Fig. 3. The dependence of the three-dimensional error in positioning in the user solution of integer PPP for the ionosphere-free measurement model and the measurement model at the original frequencies

приемников сети. В [18] описана методика сравнения аппаратурных задержек для различной НАП. Качество вычисленных в сетевой задаче целочисленного ВАМО корректирующих спутниковых поправок анализируется при их использовании в пользовательской задаче целочисленного ВАМО. На рис. 3 приведена сравнительная зависимость трехмерной ошибки местоопределения в пользовательской задаче целочисленного ВАМО для ионосферосвободной модели измерений и модели измерений на исходных частотах для интервала измерений 30 мин. В сетевой задаче использовались измерения ГНСС GALILEO и GPS локальной сети из 5 станций, в решении пользовательской задачи было 17 спутников. Как видно, для ионосферосвободной модели измерений в данном эксперименте было достигнуто мгновенное разрешение неоднозначности, поскольку сантиметровый уровень ошибки достигается с первой эпохи обработки (красная зависимость на рис. 3). При использовании модели измерений на исходных частотах (черная кривая на рис. 3) сантиметровый уровень точности был достигнут через 2–3 мин обработки 30-секундных измерений. Приведенные результаты могут рассматриваться как предельные (наилучшие) в смысле точности и оперативности для пользовательской задачи целочисленного ВАМО.

Заключение

Разработана и апробирована общая последовательность действий для решения всех задач целочисленного ВАМО:

- разработка математической модели используемых измерений;
- запись недоопределенной системы алгебраических уравнений, соответствующей решаемой задаче (сетевая или пользовательская задача с использованием ионосферосвободных измерений или измерений на исходных частотах);
- линеаризация записанной системы алгебраических уравнений в точке грубых координат НАП и запись линеаризованной системы в матричном виде;
- исследование свойств матрицы $\boldsymbol{H}_i$ полученной системы (нахождение матрицы базисных векторов ядра этой матрицы в удобной для анализа форме, т. е. с записанными в явном виде его целочисленными векторами);
- задание такой матрицы $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$, вектор-столбцы которой ортогональны к базисным векторам S-подпространства с заданными свойствами — целочисленные векторы S-подпространства дополняют целочисленные векторы, лежащие

в ядре матрицы $\boldsymbol{H}_i$, до полного репера решетки (этим достигается сохранение целочисленности для оцениваемых комбинаций неоднозначностей);

- запись системы линеаризованных алгебраических уравнений полного ранга со сжатой матрицей $\boldsymbol{H}_{i.cmpr}$, полученной из исходной матрицы $\boldsymbol{H}_i$ путем высечения столбцов в соответствии с заданной матрицей $\boldsymbol{S}_i^{\perp}$;
- решение записанной системы линеаризованных алгебраических уравнений полного ранга с неоднозначными свободными членами известными методами.

В работе на примере пользовательской задачи описан общий подход к решению задач целочисленного ВАМО. В предлагаемой общей теории решения задач целочисленного ВАМО используется выявленное свойство систем линейных уравнений в задачах целочисленного ВАМО, теория векторных пространств, теория целочисленных решеток, а также методы решения систем линейных уравнений при условии целочисленных ограничений на часть переменных.

Приведены результаты практического применения описанного метода целочисленного ВАМО для совместного использования измерений от ГНСС GPS и GALILEO. При этом продемонстрирована высокая оперативность и точность оценок координат НАП как для случая использования ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз НАП, так и для случая использования измерений псевдодальностей и псевдофаз НАП на исходных частотах.

Методический аппарат решения задачи ВАМО для оперативного местоопределения в ГНСС полностью разработан и готов к практическому использованию.

Список литературы

1. *Kouba Jan*. A guide to using International GNSS service (IGS) products. Geodetic Survey Division Natural Resources Canada. 615 Booth Street, Ottawa, Ontario K1AOE9, 2009
2. *Ge M.*, *Gendt G.*, *Rothacher M.* Resolution of GPS carrier-phase ambiguities in Precise Point Positioning (PPP) with daily observations // J. Geod., 2008, 82. P. 389–399.
3. *Jianghui Gtng*, *Xiaolin Meng*, *Alan H. Dodson*, *Felix N. Teferle* // J. Geod., 2010, 84. P. 569–581.
4. *Laurichesse D.*, *Mercier F.* Integer ambiguity resolution on undifferenced GPS phase measurements and its application to PPP. Proceedings of ION GNSS 20th International Meeting of the Satellite Division, 25–28, September 2007, p. 839–848.
5. *Denis Laurichesse*, *Flavien Mercier*, *Jean-Paul Bertias*, *Patrick Broca and Luka Cerri*. Integer Ambiguity resolution on Undifferenced GPS Phase Measurements and Its Application to PPP and Satellite Precise Orbit Determination. Navigation // Journal of The Institute of Navigation, 2009, vol. 56, № 2. P. 135–149.
6. *Laurichesse D.*, *Mercier F.*, *Bertias J.P.* Real time PPP with Undifferenced integer ambiguity resolution, experimental results. Proceedings of ION GNSS 2010, September 21–24, 2010, p. 2534–2544.
7. *Laurichesse D.*, *Privat A.* An Open-source PPP Client Implementation for the CNES PPP — WIZARD Demonstrator. Proceedings of the 28th International Technical Meeting of the ION Satellite Division, ION GNSS+ 2015, 2015, p. 2780–2789.
8. *Paul Collins*. Isolating and Estimating Undifferenced GPS Integer Ambiguities // Proceedings of ION NTM, 2008. P. 720–732.
9. *Paul Collins*, *Sunil Bisnath*. Issues in Ambiguity Resolution for Precise Point Positioning. Proceedings of the 24th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation. 2011, p. 679–687.
10. *Bisnath S.*, *Collins P.* Recent developments in precise point positioning // GEOMATICA, 2012, vol. 66, № 2, P. 103–111.
11. *Seepersad G. and Bisnath S.* Examining the interoperability of PPP-AR products. Proceedings of the 28th International Technical Meeting of ION Satellite Division, 2015.
12. *Teunissen P.J.G.* Generalised Inverses, Adjustment The Datum Problem and S-transformations. Preprint. Delft University of Technology. Reports of the Department of Geodesy Mathematical and Physical Geodesy. 1984.
13. *Рышков С.С.*, *Барановский Е.П.* Классические методы теории решетчатых упаковок // Успехи математических наук, 1979, т. 34, вып. 4 (208). С. 3–63.

14. *Поваляев А.А., Подкорытов А.Н., Никитин С.А., Филимонова Д.В.* Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2019, т. 6, вып. 1. С. 4–16.

15. *Поваляев А.А., Бабурин А.А., Подкорытов А.Н.* Применение теории решетчатых упаковок в задаче высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям в ГНСС с кодовым разделением // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2021, т. 8, вып. 2. С. 51–61.

16. *Архангельский В.А., Вейцель В.А., Волковский А.С. и др.* Радиосистемы и комплексы управления: Учеб. для вузов / Под ред. В.А. Вейцеля. 2-е изд. М.: Вузовская книга, 2017. С. 565–566.

17. *Поваляев А.А., Бабурин А.А., Подкорытов А.Н.* Высокоточное абсолютное местоопределение по измерениям на исходных частотах несущих колебаний сигналов, излучаемых КА нескольких ГНСС // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2024, т. 11, вып. 4. С. 38–50.

18. *Бабурин А.А.* Методика высокоточного абсолютного местоопределения потребителя с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений сигналов ГЛОНАСС. Дисс.… канд. техн. наук. М., 2023. 161 с. https://mai.ru/ upload/iblock/466/j8wty4qwxpn0ikf08xkds0t2jyxk1bda/Baburin-A.A.-Dissertatsiya.pdf (Дата обращения 15.05.2025).

Дата поступления рукописи
в редакцию 14.04.2025
Дата принятия рукописи
в печать 29.05.2025