

Релятивистские эффекты в спутниковых квантовых часах на эллиптических орбитах глобальных навигационных спутниковых систем

В. Ф. Фатеев, *д. т. н., профессор, generalfar@mail.ru*

*Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений
(ФГУП «ВНИИФТРИ»), Менделеево, Московская обл., Россия*

Аннотация. Впервые получено соотношение, определяющее текущее взаимное относительное релятивистское смещение частот задающих генераторов наземных и спутниковых квантовых часов, находящихся на произвольной эллиптической орбите. Релятивистское расхождение частоты и времени наземных и спутниковых часов представлено в трех равноправных формах: на основе функций Бесселя, на основе эксцентрической аномалии, а также в координатной форме. Исследованы релятивистские явления применительно к перспективной эллиптической геосинхронной орбите ГЛОНАСС.

Ключевые слова: релятивистские эффекты, смещение бортовой шкалы времени, гравитационное смещение частоты, квантовые часы, глобальные навигационные спутниковые системы

Relativistic Effects in Satellite Quantum Clocks on Elliptical Orbits of Global Navigation Satellite Systems

V. F. Fateev, *Dr. Sci. (Engineering), Prof., generalfar@mail.ru*

*Federal State Unitary Enterprise “National Research Institute for Physicotechnical and Radio Engineering
Measurements” (FSUE “VNIIFTRI”), Mendeleevo, Moscow region, Russian Federation*

Abstract. This paper presents a novel finding of the current mutual relative relativistic frequency shift between master oscillators of ground-based and satellite quantum clocks situated in an arbitrary elliptical orbit. The relativistic disparity in frequency and time between the ground and satellite clocks is described using three equivalent forms: utilizing Bessel functions, employing the eccentric anomaly, and presenting it in coordinate form. The investigation focuses on relativistic phenomena in the context of the promising elliptical geosynchronous orbit of GLONASS.

Keywords: relativistic effects, onboard time scale shift, gravitational frequency shift, quantum clock, global navigation satellite systems

1. Введение

Исследования релятивистских эффектов в квантовых (атомных) часах, движущихся в околоземном пространстве, опубликованы в целом ряде зарубежных и российских документов и статей [например, [1–5]]. Имеется несколько обширных отечественных и зарубежных обзоров, посвященных результатам теоретических и экспериментальных работ по теме релятивистских эффектов [6–8]. Изучаются эффекты смещения бортового времени на навигационных спутниках Galileo, выведенных на нештатные эллиптические орбиты [9, 10]. Применительно к глобальным навигационным спутниковым системам (ГНСС), в частности к GPS, релятивистские эффекты наиболее глубоко исследованы в работах [11, 12], однако в них рассмотрены эффекты смещения времени только для околоземных средневысотных орбит.

В отечественном научном сообществе обсуждается вопрос о введении в состав орбитальной группировки ГЛОНАСС высокоорбитального космического комплекса (ВКК), основанного на использовании геосинхронных орбит с наклоном $64,8^\circ$, размером полуоси 42 160 тыс. км и эксцентриситетом 0,072 [13]. Вместе с тем обоснованного решения по релятивистскому смещению собственной частоты задающих генераторов бортовых квантовых часов на эллиптических орбитах Земли в известных публикациях не представлено.

Целью данной статьи является вывод с позиции общей теории относительности точных аналитических соотношений для частоты и времени бортовых квантовых часов, размещенных на произвольной околоземной эллиптической орбите.

2. Релятивистская разность интервалов собственного времени двух квантовых часов, движущихся в гравитационном поле Земли

Для вывода общего закона изменения собственного (действительного, измеряемого) времени для квантовых часов, движущихся в гравитационном поле Земли (ГПЗ), воспользуемся известным выражением из общей теории относительности

для квадрата пространственно-временного интервала ds [15, 16]:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + 2g_{0\alpha}dx^\alpha cdt + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad (1)$$

где c — скорость света; dt — бесконечно малый интервал координатного времени t , не зависящего от параметров гравитационного поля; g_{00} , $g_{0\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$ — компоненты четырехмерного метрического тензора g_{ik} гравитационного поля в выбранной системе отсчета; dx^α , dx^β — пространственные бесконечно малые интервалы; здесь и далее греческие индексы $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; латинские $i, k = 0, 1, 2, 3$.

Интервал ds инвариантен к выбору системы отсчета и поэтому не меняет своего значения в любой мгновенно введенной инерциальной невращающейся системе отсчета [15, 16]. Для инерциальной системы, как известно, $ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2$, где $g_{\alpha\alpha} = 1$, $g_{00} = -1$. Поэтому для двух событий в одной и той же пространственной точке этой системы координат ($dx = dy = dz = 0$) выражение для этого интервала имеет вид:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 = -c^2d\tau^2, \quad (2)$$

где $d\tau$ — собственное время системы. Поэтому соотношение (1) можно привести к виду:

$$-c^2d\tau^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta - \left(\sqrt{-g_{00}}cdt - \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{-g_{00}}}dx^\alpha \right)^2, \quad (3)$$

где $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ — трехмерный метрический тензор в выбранной системе отсчета.

Координатная скорость движения рассматриваемого хранителя времени относительно начала выбранной системы отсчета

$$V_k^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}; \quad V_k^2 = V_\alpha V^\alpha = \gamma_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta. \quad (4)$$

На основании этого соотношения из формулы (3) получаем формулу для релятивистского коэффициента преобразования шкалы собственного времени τ относительно шкалы координатного времени t для произвольного хранителя времени, движущегося в гравитационном поле с координатной скоростью V_k [17, 18]:

$$\theta = \frac{d\tau}{dt} = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00}} - \frac{g_{0\alpha}V_k^\alpha}{c\sqrt{-g_{00}}} \right)^2 - \frac{V_k^2}{c^2} \right\}^{0,5}. \quad (5)$$

С помощью этой формулы легко найти релятивистскую разность показаний шкал времени двух разнесенных квантовых часов как функцию текущего времени базовых часов. Для этого введем в рассмотрение наземный базовый (эталонный) хранитель времени — квантовые часы КЧ-0 с эталонной шкалой собственного и координатного времени τ_0 и t_0 , а также спутниковые квантовые часы КЧ-С (вторичный эталон) со шкалой времени τ_c и t_c .

Связь между интервалами собственного времени в двух точках пространства установим при условии, что для обоих хранителей промежутки координатного времени одинаковы, т. е. $dt_c = dt_0$, где в качестве координатного времени используем геоцентрическое координатное время $t = t_{\text{TCG}}$. Кроме того, для перехода от координатной скорости подвижного хранителя V_k^α (4) к вектору действительной его скорости V^α , измеренной в единицах собственного времени τ_0 базового хранителя, используем соотношение $V_k^\alpha = V^\alpha \theta_0$. В результате из (5) сначала получаем выражения для определения интервалов времени базовых и спутниковых часов через координатное время

$$d\tau_0 = \theta_0 dt, \quad d\tau_c = \theta_c dt, \quad (6)$$

а затем и их взаимное соотношение

$$\frac{d\tau_c}{d\tau_0} = \frac{\theta_c}{\theta_0}, \quad (7)$$

где коэффициенты преобразования θ_0 , θ_c относятся, соответственно, к шкале базовых и спутниковых квантовых часов.

На основе соотношения (7) находим искомую релятивистскую разность показаний шкал времени:

$$\Delta\tau_P = \Delta\tau_c - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left(\frac{\theta_c}{\theta_0} - 1 \right) d\tau_0, \quad (8)$$

где τ_{01} , τ_{02} — моменты начала и окончания интервала интегрирования по шкале τ_0 ; $\Delta\tau_0 = \tau_{02} - \tau_{01}$; $\theta_c = \theta_c(\mathbf{R}_c, \mathbf{V}_c)$ — переменный коэффициент преобразования шкалы времени спутниковых часов, определяемый по формуле (5) вдоль их пути движения с переменным радиусом-вектором \mathbf{R}_c и скоростью \mathbf{V}_c .

Выражение для коэффициента преобразования шкалы собственного времени движущихся часов (5) и, соответственно, вид соотношений (6)–(8)

существенно зависят от метрических свойств выбранной системы отсчета. Релятивистские эффекты в орбитальной системе спутников будем рассматривать в невращающейся в инерциальном пространстве Международной небесной системе отсчета ICRS (*International Celestial Reference System*). Фундаментальный метрический тензор в системе ICRS имеет следующие компоненты [15, 16]:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad g_{0\alpha} = 0, \quad (9)$$

где $\varphi = \varphi_e + \varphi_M + \varphi_S$ — гравитационный потенциал, равный скалярной сумме потенциалов гравитационного поля Земли (ГПЗ) φ_e и ближайших небесных тел — Луны φ_M и Солнца φ_S . Если текущее положение обоих часов в системе ICRS характеризовать радиусами-векторами, соответственно \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_c , а скорости их перемещения в этой системе — векторами \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_c , то коэффициенты преобразования шкал собственного времени базовых и спутниковых часов θ_0 , θ_c в системе ICRS определяются следующими формулами [17–19]:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 1 - \frac{\varphi_0}{c^2} - \frac{V_0^2}{2c^2} + Q(c^{-4}), \\ \theta_c &= 1 - \frac{\varphi_c}{c^2} - \frac{V_c^2}{2c^2} + Q(c^{-4}), \end{aligned} \quad (10)$$

где φ_0 , φ_c — суммарные скалярные гравитационные потенциалы в текущих точках размещения соответственно наземных и спутниковых квантовых часов; $Q(c^{-4})$ — малые члены порядка $1/c^4$, которыми далее пренебрегаем.

В невращающейся системе отсчета вектор линейной скорости \mathbf{V}_c определяется параметрами орбитального движения спутниковых часов, а в векторе текущей линейной скорости \mathbf{V}_0 наземных часов, расположенных на вращающейся Земле, в ICRS содержится информация о неравномерности вращения Земли [19]. Поэтому для квадрата вектора скорости наземных часов в ICRS можем записать:

$$V_0^2 = V_{\Omega_0}^2 + \Delta V_{\Omega_0}^2, \quad (11)$$

где V_{Ω_0} — стабильная линейная скорость, вызванная постоянной составляющей скорости вращения

Земли вокруг оси OZ $\Omega_0 = 7,29 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$; $\Delta \mathbf{V}_\Omega$ — вариации скорости, вызванные неравномерным вращением Земли вокруг всех трех осей за счет прецессии, нутации и девиации вектора скорости Ω_0 , а также за счет отклонения полюсов Земли.

2.1. Взаимное релятивистское смещение частот задающих генераторов спутниковых и наземных квантовых часов

Установим соотношение между частотами задающих генераторов $f_0^{3\Gamma}$, $f_C^{3\Gamma}$ наземных и спутниковых квантовых часов. Для этого рассмотрим пару исследуемых квантовых часов со шкалами τ_0 , τ_C , а также независимые эталонные часы со шкалой $\tau_{\text{эт}}$.

Условимся, что исследуемые часы отсчитывают свое время путем подсчета количества секундных меток за некоторый эталонный промежуток времени $\Delta\tau_{\text{эт}}$, отсчитываемый по эталонным часам. Количество **своих** псевдосекундных меток (т. е. текущее время по своей шкале в **своих** псевдосекундах) в каждом часе определяется, в свою очередь, путем подсчета переходов через нуль колебаний своих задающих генераторов:

$$\begin{aligned} \tau_C &= N_C \cdot \delta\tau_C^*, \\ \tau_0 &= N_0 \cdot \delta\tau_0^*, \end{aligned} \quad (12)$$

где N_C , N_0 — количество подсчитанных **своих** псевдосекундных меток, каждая из которых имеет длительность своей псевдосекунды, т. е. $\delta\tau_C^* = \delta\tau_0^* = 1 \text{ с}$; знак (*) обозначает псевдосекунду.

Далее определим искомые частоты задающих генераторов исследуемых квантовых часов в виде:

$$f_C^{3\Gamma} = \frac{N_C}{\Delta\tau_{\text{эт}}}, \quad f_0^{3\Gamma} = \frac{N_0}{\Delta\tau_{\text{эт}}},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} N_C &= f_C^{3\Gamma} \Delta\tau_{\text{эт}}, \\ N_0 &= f_0^{3\Gamma} \Delta\tau_{\text{эт}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), выполняя необходимые сокращения и переходя к принятым выше обозначениям, искомое соотношение получаем в виде:

$$\frac{d\tau_C}{d\tau_0} = \frac{f_C^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}} = \frac{\theta_C}{\theta_0}, \quad (14)$$

что совпадает с выводом других авторов, полученным иным путем [20].

Из формулы (14) следует соотношение, определяющее текущее взаимное относительное релятивистское смещение частот задающих генераторов спутниковых и базовых наземных квантовых часов $\Delta f_p^{3\Gamma} = f_c^{3\Gamma} - f_0^{3\Gamma}$:

$$\frac{f_c^{3\Gamma} - f_0^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}} = \frac{\Delta f_p^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}} = \frac{\theta_C}{\theta_0} - 1. \quad (15)$$

Этот релятивистский эффект смещения частоты задающих генераторов (ЗГ) спутниковых часов впервые исследовал Н. Эшби [11], и он широко используется на практике спутниковой навигации. Дело в том, что гравитационное увеличение частоты ЗГ бортовых часов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) может существенно снизить их точность. Поскольку бортовая шкала времени навигационных спутников ГНСС должна совпадать со шкалой наземного эталона времени, для компенсации вредного гравитационного смещения частоты в значение частоты ЗГ спутниковых квантовых часов ГНСС перед их запуском заранее вносят корректирующее смещение с обратным знаком. В частности, для ГЛОНАСС относительная величина этой корректирующей поправки составляет $(-4,36 \cdot 10^{-10})$ [21], для GPS эта поправка равна $(-4,4647 \cdot 10^{-10})$ [22]. В настоящее время имеется ряд работ, посвященных повышению точности определения гравитационного эффекта замедления времени в космосе, в частности на основе наблюдения бортовых шкал времени навигационных спутников Galileo, выведенных на нештатную орбиту [9, 10].

В подтверждение соотношения (15) автором с помощниками-аспирантами проведены два эксперимента [23, 24], в которых использовалась пара разнесенных по высоте высокостабильных водородных квантовых часов, соединенных радиоканалом на основе ВОЛС.

Таким образом, согласно (14) и новым экспериментальным данным, изменение масштаба бортового времени τ_C спутниковых часов относительно шкалы времени τ_0 вызывает прямо пропорциональное изменение частоты задающего генератора КЧ-С $f_c^{3\Gamma}$ относительно частоты $f_0^{3\Gamma}$ базовых

часов КЧ-0. Справедливо и другое утверждение: изменение масштаба времени на борту КА вследствие воздействия гравитационного поля в сторону его увеличения (или уменьшения) означает, что частота его задающего генератора прямо пропорционально увеличивается (или, соответственно, уменьшается).

На основе соотношения (15) формулу (8) можно представить в виде:

$$\Delta\tau_P = \Delta\tau_c - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \frac{\Delta f_p^{3\Gamma}(\tau_0)}{f_0^{3\Gamma}} d\tau_0. \quad (16)$$

3. Общее решение для релятивистского смещения частоты и времени орбитальных часов на эллиптической орбите

3.1. Коэффициенты преобразования шкал времени базовых наземных и спутниковых часов

Поскольку базовые часы располагаются на поверхности вращающейся Земли и движутся вокруг оси вращения со скоростью \mathbf{V}_0 , то коэффициент θ_0 (10) с учетом (11) представим в виде:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\varphi_0}{c^2} - \frac{V_0^2}{2c^2} = 1 - \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{\Delta V_{\Omega}^2}{2c^2}, \quad (17)$$

где приняты следующие обозначения: $\Phi_0 = \varphi_0 + 0,5V_{\Omega_0}^2$ — обобщенный гравитационный потенциал, равный сумме потенциала поля Земли φ_0 и ее центробежного потенциала $0,5V_{\Omega_0}^2 = 0,5\Omega_0^2\rho_0^2 \cos^2\psi_0$; ρ_0 , ψ_0 — соответственно радиус-вектор и геоцентрическая широта точки размещения часов на поверхности Земли.

Формулу (17) преобразуем к более удобному для данной задачи виду, пользуясь определением потенциала геоида. Как известно [1, 2, 25], потенциал этой эквипотенциальной поверхности на вращающейся Земле — величина постоянная: $\varphi_G = 6,26368534 \cdot 10^7 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Наземные базовые часы в общем случае располагаются не на поверхности геоида, а на некоторой высоте над ним. Поэтому

потенциал Φ_0 (17) для точки размещения наземных часов представим через потенциал геоида в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varphi_0 + \frac{1}{2}\Omega_e^2\rho_0^2 \cos^2\psi_0 = \varphi_G + \int_0^{H_0} \frac{\partial\Phi_0}{\partial H} dH = \\ &= \varphi_G - g_0H_0 + g_{\Omega}H_0 \cos\psi_0, \end{aligned} \quad (18)$$

где H_0 — ортометрическая высота рассматриваемой точки размещения наземных часов, отсчитываемая от поверхности геоида в теле Земли до точки на физической поверхности Земли; $g_0 = -\mu_e/\rho_0^2$ — среднее значение ускорения свободного падения вдоль линии отвеса, соответствующей точке размещения часов; μ_e — геоцентрическая гравитационная постоянная; $g_{\Omega} = \Omega_0^2\rho_0 \cos\psi_0$ — центробежное ускорение точки размещения часов.

Полученная формула учитывает как влияние неравномерности вращения Земли, так и приливы Луны и Солнца, поскольку форма геоида зависит от действия этих факторов. Вместе с тем влияние этих факторов на определение высоты, не превышающей сотен метров, весьма незначительно. Соотношение справедливо для небольших высот, когда выполняется условие $H_0 \ll \rho_0$. Кроме того, следует учесть, что $g_{\Omega} \ll g_0$. С учетом этих замечаний формула (17) принимает вид:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{\Delta V_{\Omega}^2}{2c^2} \approx 1 - \left(\frac{\varphi_G}{c^2} - \frac{g_0H_0}{c^2} \right) - \frac{\Delta V_{\Omega}^2}{2c^2}. \quad (19)$$

Учитывая далее воздействие на спутниковые часы составляющих неоднородности потенциала гравитационного поля Земли (второй и других зональных гармоник), а также принимая во внимание приливные потенциалы Луны и Солнца, коэффициент θ_c для спутниковых часов (10) представим в виде:

$$\theta_c = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mu_e}{\rho_c} + \frac{V_c^2}{2} \right) - \frac{1}{c^2} (\delta\varphi_n^c + \delta\varphi_{MS}^c), \quad (20)$$

где ρ_c , \mathbf{V}_c — соответственно текущая геоцентрическая высота и скорость спутника; $\delta\varphi_n^c$, $\delta\varphi_{MS}^c$ — соответственно микрopotенциалы неучтенных возмущающих гармоник потенциала ГПЗ, а также сумма приливных микрopotенциалов Луны (M) и Солнца (S), воздействующие на спутник.

Искомые релятивистские расхождения шкал времени и задающих частот пары исследуемых часов (8) и (16), которые вычисляются на основе соотношений (18), (19) и (20), имеют вид:

$$\Delta\tau_p = \Delta\tau_C - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_0} \frac{\Delta f_p^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}} d\tau_0 = \Delta\tau_p^{\text{осн}} + \delta\tau_\mu, \quad (21)$$

где

$$\Delta\tau_p^{\text{осн}} = \frac{1}{c^2} \int_{\tau_0} \left(\Phi_0 - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_C^2}{2} \right) d\tau_0 \quad (22)$$

— основная, т. е. преобладающая часть релятивистского смещения времени в системе «спутник–Земля»; Φ_0 — потенциал в точке размещения наземных часов, который определяется формулой (18)

$$\delta\tau_\mu = \delta\tau_n^C + \delta\tau_{MS}^C + \delta\tau_\Omega^E \quad (23)$$

— релятивистское взаимное микросмещение шкал времени спутника и Земли, обусловленное суммарным действием микропотенциалов неоднородности ГПЗ ($\delta\tau_n^C$), лунно-солнечных приливов ($\delta\tau_{MS}^C$), а также влиянием неравномерности вращения Земли ($\delta\tau_\Omega^E$);

$$\frac{\Delta f_p^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}} = \frac{f_c^{3\Gamma} - f_0^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_C^2}{2} \right) + \frac{\delta f_\mu^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}}; \quad (24)$$

$\delta f_\mu^{3\Gamma} = \delta f_n^C + \delta f_{MS}^C + \delta f_\Omega^E$ — сумма релятивистских микросмещений частот задающих генераторов ЗГ наземных и спутниковых квантовых часов, аналогичных микросмещениям шкал времени (23).

3.2. Основная составляющая релятивистского смещения частоты и времени «борт–Земля» для эллиптических орбит

Чтобы преобразовать формулы для основного смещения времени и частоты (22) и (24) к виду, удобному для практического применения, воспользуемся известными формулами теории невозмущенного кеплеровского движения [14]:

$$\frac{\mu_e}{\rho_c} = \frac{\mu_e}{P} (1 + e \cos \vartheta), \quad V_c^2 = \frac{\mu_e}{P} (1 + e^2 + 2e \cos \vartheta), \quad P = a(1 - e^2), \quad (25)$$

где P , e , ϑ , 0 — соответственно фокальный параметр, эксцентриситет орбиты, истинная аномалия спутника на орбите, а также полуось орбиты спутника. Кроме того, используем также связь истинной и средней аномалии спутника M в виде [14]:

$$\cos \vartheta = -e + \frac{2(1 - e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM, \quad (26)$$

где $J_k(ke) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{ke}{2} \right)^{k+2n}$ — функция Бесселя первого рода; $M = \Omega_C(\tau - \tau_{\Pi})$ — средняя аномалия; τ_{Π} — время прохождения перигея; $\Omega_C = \sqrt{\mu_e/a^3}$ — средняя угловая скорость движения спутника по орбите (среднее движение).

В результате основная составляющая текущего частотного смещения (24) вдоль эллиптической орбиты выражается в виде:

$$\frac{\Delta f_p^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}} = \frac{f_c^{3\Gamma} - f_0^{3\Gamma}}{f_0^{3\Gamma}} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a} \right) + \frac{\Delta f_p^{\text{эл1}}}{f_0^{3\Gamma}}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_p^{\text{эл1}}}{f_0^{3\Gamma}} &= \frac{(f_c^{3\Gamma} - f_0^{3\Gamma})_{\text{эл1}}}{f_0^{3\Gamma}} = \\ &= -\frac{4\mu_e}{c^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos k\Omega_C(\tau_0 - \tau_{\Pi}) \end{aligned} \quad (28)$$

— первая форма представления «эллиптического» релятивистского смещения частоты ЗГ бортовых часов относительно наземных (помечено индексом «1»).

Соответствующее релятивистское расхождение шкал времени наземных и бортовых квантовых часов получаем путем интегрирования частотного смещения (27) в соответствии с (23) на интервале времени от момента синхронизации τ_H до текущего момента τ базового времени (индекс «0» для простоты опускаем). В результате получаем сумму линейно нарастающей и периодической составляющих:

$$\Delta\tau_P^{\text{осн1}} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a} \right) (\tau - \tau_H) + \Delta\tau_P^{\text{эл1}}, \quad (29)$$

где

$$\Delta\tau_P^{\text{эл1}} = -\frac{4\sqrt{\mu_e a}}{c^2} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} [\sin k\Omega_C(\tau - \tau_{\Pi}) - \sin k\Omega_C(\tau_H - \tau_{\Pi})] \quad (30)$$

— первая форма представления «эллиптической» составляющей смещения шкал времени «борт–Земля», зависящей от эксцентриситета орбиты.

В полученной формуле для частоты (27) первое слагаемое определяет постоянное релятивистское смещение частоты задающих генераторов в системе квантовых часов «борт–Земля». Второе слагаемое описывает несинусоидальное, переменное вдоль орбиты «эллиптическое» частотное смещение, которое является суммой гармонических составляющих с частотами $k\Omega_C$. Оно определяется полуосью орбиты и эксцентриситетом, содержащимся в разных степенях в выражении для функции Бесселя [17, 25]. В перигее и апогее орбиты знаки релятивистского смещения противоположны, причем в перигее частота ЗГ спутника меньше частоты ЗГ наземных квантовых часов, а бортовые часы, согласно (30), отстают от наземных.

Если ограничиться рассмотрением эллиптических орбит с эксцентриситетом до $e \approx 0,74$ (для орбит типа «Молния»), то в разложениях (28) и (30) можно оставить лишь первые шесть функций Бесселя, содержащие эксцентриситет в степени по десятую включительно [17, 25]:

$$\begin{aligned} J_1(e) &= \frac{e}{2} \left(1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \frac{e^6}{9216} + \dots \right), \\ J_2(2e) &= \frac{e^2}{2} \left(1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \frac{e^6}{360} + \dots \right), \\ J_3(3e) &= \frac{9}{16} e^3 \left(1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \dots \right), \\ J_4(4e) &= \frac{2e^4}{3} \left(1 - \frac{4e^2}{5} + \frac{4e^4}{15} - \dots \right), \\ J_5(5e) &= \frac{625e^5}{768} \left(1 - \frac{25e^2}{24} + \frac{625e^4}{1344} - \dots \right), \\ J_6(6e) &= \frac{81e^6}{80} \left(1 - \frac{9e^2}{7} + \frac{81e^4}{112} - \dots \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Ниже рассмотрены две другие равноправные формы представления релятивистских смещений

частоты и времени в системе квантовых часов «спутник–земля», которые имеют свои особенности и могут найти различные применения в ГНСС, использующих эллиптические орбиты.

Вторая форма представления «эллиптической» составляющей смещения времени (30) (индекс²) основана на использовании известного соотношения, связывающего эксцентрическую аномалию спутника E и среднюю его аномалию M [25]:

$$\sin E = \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM. \quad (32)$$

В результате «эллиптическая» составляющая (30) приобретает следующую эквивалентную форму представления [2, 11, 12]:

$$\Delta\tau_P^{\text{эл2}} = -\frac{2e\sqrt{\mu_e a}}{c^2} \sin E. \quad (33)$$

Соответствующий релятивистский сдвиг частоты ЗГ спутника относительно Земли находим путем дифференцирования (33) по базовому времени:

$$\frac{d(\Delta\tau_P^{\text{эл2}})}{d\tau} = \frac{\Delta f_p^{\text{эл2}}}{f_0} = -\frac{2e\sqrt{\mu_e a}}{c^2} \cos E \cdot \frac{dE}{d\tau}. \quad (34)$$

Учитывая, что $M = \sqrt{\mu_E/a^3}(\tau - \tau_{\Pi})$, из уравнения Кеплера $E - e \sin E = M$ находим:

$$\frac{dE}{d\tau} = \sqrt{\frac{\mu_e}{a^3}} \cdot \frac{1}{1 - \cos E},$$

откуда следует окончательный вид формулы (34):

$$\frac{\Delta f_p^{\text{эл2}}}{f_0} = -\frac{2e\mu_e}{c^2 a} \frac{\cos E}{(1 - e \cos E)}. \quad (35)$$

Полное релятивистское смещение определяется суммой (27), где «эллиптическая» составляющая определяется формулой (35):

$$\frac{\Delta f_p^{\text{ЗГ}}}{f_0^{\text{ЗГ}}} = \frac{f_c^{\text{ЗГ}} - f_0^{\text{ЗГ}}}{f_0^{\text{ЗГ}}} = \frac{1}{c^2} \left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a} \right) + \frac{\Delta f_p^{\text{эл2}}}{f_0^{\text{ЗГ}}}. \quad (36)$$

В целом вторая форма представления «эллиптических» релятивистских эффектов времени и частоты в виде формул (33) и (35) пригодна для любых эллиптических орбит с эксцентриситетом до 0,74, в том числе для перспективных геосинхронных орбит ВКК ГЛОНАСС. Из формулы (35) следует,

что релятивистское смещение частоты ЗГ бортовых часов вблизи перигея, как и следовало ожидать, отрицательно, вблизи апогея — положительно.

В качестве примера на рисунке представлен график в виде функций эксцентрической аномалии для релятивистской разности частот задающих генераторов квантовых часов, движущихся по геосинхронной орбите ВКК ($a = 42,16 \cdot 10^6$ м; $e = 0,072$), относительно частоты наземных часов.

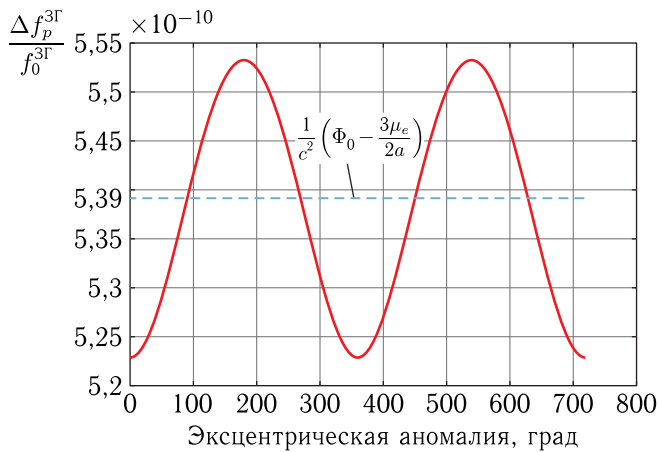


Рисунок. Изменение частоты задающего генератора бортовых часов на геосинхронной орбите ВКК относительно частоты наземных часов

Из графика видно, что постоянное относительное смещение частот, определяемое основной составляющей в формуле (36), составляет $+5,39 \cdot 10^{-10}$ (для сравнения: на штатной орбите ГЛОНАСС относительное релятивистское смещение частот бортового задающего генератора составляет $+4,36 \times 10^{-10}$). Кривая «эллиптического» изменения частоты относительно среднего значения несимметрична, причем максимальное значение разности частот «спутник–Земля» в апогее составляет $5,53 \times 10^{-10}$, минимальное — в перигее $5,23 \cdot 10^{-10}$. Размах относительного смещения частоты между апогеем и перигеем около $0,3 \cdot 10^{-10}$. С точки зрения обеспечения точности навигации такая переменная разность частот создает существенные трудности при коррекции бортовой шкалы времени.

Из формулы (33) следует, что амплитуда изменения релятивистского смещения времени бортовой ШВ относительно наземной базовой ШВ превышает для рассматриваемой геосинхронной орбиты 200 нс. В отсутствие мер компенсации погрешность изме-

рения дальности в канале «спутник–потребитель» превысит ± 60 м, что недопустимо.

Третья форма «эллиптической» составляющей релятивистского смещения времени (*индекс*³) выводится на основе соотношения (33) с использованием скалярного произведения текущего радиус-вектора \mathbf{R}_C и текущего вектора скорости спутника \mathbf{V}_C [11, 12]:

$$\Delta\tau_P^{\text{эл3}} = -\frac{2\mathbf{R}_C \mathbf{V}_C}{c^2} = -\frac{2}{c^2}(XV_x + YV_y + ZV_z)_C, \quad (37)$$

где $(X, Y, Z)_C$ и $(V_x, V_y, V_z)_C$ — текущие прямоугольные координаты и составляющие скорости спутника по осям невращающейся системы отсчета ICRS. Адекватность обратного преобразования формы (37) в форму (33) показана в [17].

Если продифференцировать релятивистское расхождение (37) по времени, то, в соответствии с (23), получаем искомую формулу для относительного релятивистского расхождения частот ЗГ квантовых часов спутника и Земли вдоль орбиты:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\Delta\tau_P^{\text{эл3}}) &= \frac{(f_c^{\text{ЗГ}} - f_0^{\text{ЗГ}})_P^{\text{эл3}}}{f_0^{\text{ЗГ}}} = \\ &= -\frac{2}{c^2}[(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)_C + (X\ddot{X} + Y\ddot{Y} + Z\ddot{Z})_C], \end{aligned} \quad (38)$$

где $\ddot{X}_C, \ddot{Y}_C, \ddot{Z}_C$ — кинематические ускорения спутника вдоль координатных осей.

Форма представления релятивистского смещения времени и частоты ЗГ в виде формул (37) и (38) пригодна для любых эллиптических, а также для околокруговых орбит. В частности, в ГНСС GPS формула (37) используется при компенсации «эллиптического» эффекта непосредственно в приемной навигационной аппаратуре потребителя.

Заключение

На основе методов общей теории относительности получены формулы для релятивистских коэффициентов преобразования шкал собственного времени для произвольных хранителей времени, движущихся в гравитационном поле Земли в невращающейся системе отсчета ICRS. Предложены формулы

для релятивистской разности показаний шкал времени и разности частот задающих генераторов разнесенных квантовых часов в виде функций текущего базового наземного времени.

Впервые получено соотношение, определяющее текущее взаимное относительное релятивистское смещение частот задающих генераторов спутниковых и базовых наземных квантовых часов. При этом установлено, что изменение масштаба бортового времени спутниковых часов относительно шкалы базового времени вызывает прямо пропорциональное изменение частоты задающего генератора спутниковых часов относительно частоты базовых часов.

На этой основе получено общее решение для релятивистского смещения частоты задающих генераторов орбитальных часов на эллиптической орбите относительно частоты наземных часов. Основная (преобладающая) составляющая релятивистского частотного смещения «спутник–земля» представлена в трех формах: на основе разложения по функциям Бесселя, на основе эксцентрической аномалии, а также в координатной форме. Исследовано частотное смещение для часов, находящихся на перспективной геосинхронной орбите ВКК ГЛОНАСС.

В следующей статье на этой основе предполагается уточнить релятивистские эффекты частоты и времени на околокруговых орбитах ГНСС, а также определить влияние микропотенциалов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-11023.

Список литературы

1. *Petit G. and Luzum B. (eds.) // IERS Conventions (2010), International Earth Rotation and Reference Systems Service Technical Note No.E36, Frankfurt, Germany, 2010.*
2. Recommendation ITU-R TF.2018 (08/2012) // Relativistic time transfer in the vicinity of Earth and in the solar system. 2012. R-REC-TF.2018-0-201208-I!!PDF-E.
3. *Wolf P. and Petit G. Relativistic theory for clock synchronization and realization of coordinate times // Astron. Astrophys., 1995, vol. 304. P. 653–661.*
4. *Soffel M. et al. The IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement // Asrton. J., 2003, vol. 126. P. 2687–2706.*
5. *Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972. 382 с.*
6. *Руденко В. Н. Релятивистские эксперименты в гравитационном поле // УФН, 1960, т. 72, вып. 4. С. 673–676.*
7. *Турьшиев В. Г. Экспериментальные проверки общей теории относительности: недавние успехи и будущие направления исследований // УФН, 2009, т. 179, № 1. С. 3–34.*
8. *Окунь Л. Б., Селиванов К. Г., Телегди В. Гравитация, фотоны, часы // УФН, 1999, т. 169:10. С. 1141–1147.*
9. *Herrmann Sven, Finke Felix, Lulf Martin. Test of the Gravitational Redshift with Galileo Satellites in an Eccentric Orbit // Phys. Rev. Lett. 2018. Dec. T. 121*
10. *Delva P., Puchades N., Schönemann E. et al. Gravitational Redshift Test Using Eccentric Galileo Satellites // Physical review letters, 2018, 121, 231101.*
11. *Ashby N. Relativity in the Global Positioning System // Living Reviews in Relativity, 2003, vol. 6. P. 1–42.*
12. *Kouba J. Improved relativistic transformations in GPS // GPS Solutions, 2004, vol. 8. P. 170–180.*
13. *Урличич Ю. М., Коблов С. В., Карутин С. Н. и др. Стратегия развития системы ГЛОНАСС до 2030 года. Доклад на Восьмой Всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение» (КВНО-19), 15–19 апреля 2019 г., ИПА РАН, Санкт-Петербург.*
14. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.*
16. *Меллер К. Теория относительности (2-е изд.). М.: Атомиздат, 1975. 400 с.*
17. *Фатеев В. Ф. Релятивистская метрология околоземного пространства-времени. Монография. Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2017. 439 с.*
18. *Фатеев В. Ф. Релятивистская метрология околоземного пространства-времени и ее практические приложения // Астрономический журнал, 2018, т. 95, № 12. С. 1–6.*

19. *Фатеев В. Ф., Копейкин С. М., Пасынок С. Л.* Влияние неравномерности вращения Земли на релятивистские смещения частоты и времени наземных атомных часов // Измерительная техника, 2015, № 6. С. 41–45.
20. *Одуан К., Гино Б.* Измерение времени. Основы GPS. М.: Техносфера, 2002.
21. Интерфейсный контрольный документ ГЛОНАСС, редакция 5.1, 2008.
22. GPS. Интерфейсный контрольный документ (ICD-200С-002, 25.09.97).
23. *Фатеев В. Ф., Смирнов Ф. Р., Рыбаков Е. А.* Измерение эффекта удвоения гравитационного смещения частоты с помощью квантового нивелира на водородных часах // Письма в ЖТФ, 2022, т. 48, вып. 7. С. 36–38.
24. *Фатеев В. Ф., Смирнов Ф. Р., Донченко С. С.* Измерение эффекта гравитационного замедления времени дуплексным наземным квантовым нивелиром // Измерительная техника, 2022, № 2. С. 22–27.
25. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П. и др.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1971. 584 с.

Дата поступления рукописи
в редакцию 02.03.2023
Дата принятия рукописи
в печать 26.05.2023