

## Определение временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов

А. А. Бабурин, [contact@spacecorp.ru](mailto:contact@spacecorp.ru)

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** Для высокоточных абсолютных местоопределений (ВАМО) с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений (*integer PPP, PPP-AR*) требуются специальные поправки к показаниям спутниковых часов, которые позволяют сохранить целочисленность псевдофазовых неоднозначностей и использовать эту информацию для уменьшения времени сходимости к точному решению. Поправки к спутниковым часам, которые обычно используются для действительного ВАМО (*float PPP*) (например, от *IGS* или другого аналитического центра), не подходят для целочисленного ВАМО. Настоящая статья посвящена определению требований, которые предъявляются к поправкам к спутниковым часам и алгоритму их определения по измерениям сети наземных станций для спутников ГЛОНАСС с частотным разделением каналов.

Оценки поправок вычисляются по сети станций, оборудованных однотипными приемниками (одной модели от одного производителя). Предложена методика сравнения кодовых аппаратурных задержек различных приемников. Продемонстрировано, что у используемых приемников кодовые аппаратурные задержки совпадают (с точностью до константы).

При нестрогом сохранении целочисленности оценок псевдофазовых неоднозначностей следует уделять особое внимание выравниванию фазовых измерений относительно кодовых. При оценивании поправок к спутниковым часам алгоритмы разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений применялись только к неоднозначностям на длине волны  $\approx 84$  см (широкие, *wide-lane*, неоднозначности Мельбурна–Вуббена).

**Ключевые слова:** сетевое решение, кодовые аппаратурные задержки, ГЛОНАСС, частотное разделение каналов, однородная сеть станций, целочисленное высокоточное абсолютное местоопределение, разрешение целочисленной неоднозначности

## Network Solution Computation for Integer Precise Point Positioning with GLONASS FDMA Signals

A. A. Baburin, [contact@spacecorp.ru](mailto:contact@spacecorp.ru)

Joint Stock Company “Russian Space Systems”, Moscow, Russian Federation

**Abstract.** Integer precise point positioning (*integer PPP, PPP-AR*) requires special satellite corrections (products) that enable ambiguity resolution, which is a key to fast convergence time. Float precise point positioning (*float PPP*) clock products (e.g., by *IGS* or another analysis center) do not enable *PPP-AR*. This paper considers the algorithms of network clock products computation with *GLONASS FDMA* observation data of ground network stations.

The estimates of corrections are calculated by the ground stations equipped with homogeneous receivers (the same model of the same manufacturer). Code hardware biases difference estimation method of different receivers is proposed. It was demonstrated, that the values of code hardware biases of the receivers used for network solution match up to a constant.

While approximate-integer ambiguity estimation one should pay special attention to phase-code alignment. Integer AR algorithms are applied to wide-lane Melbourne–Wubben ambiguities only while clock products estimation.

**Keywords:** network solution, code hardware bias, *GLONASS*, *FDMA*, homogeneous receiver network, integer precise point positioning, ambiguity resolution

## Введение

В предыдущей работе автора [1] рассматривалась так называемая «пользовательская задача» — задача определения высокоточных абсолютных координат навигационной аппаратуры потребителя (НАП) [2] при условии известных временных корректирующих поправок (ВКП) по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов (ЧРК). В данной статье рассматривается решение «сетевой задачи» — задачи определения ВКП по измерениям сети наземных станций с известными координатами [3]. Так как в решении пользовательской задачи используется разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений [4, 5], то предполагается, что определенные в сетевой задаче ВКП должны позволять разрешить неоднозначность псевдофазовых измерений в НАП. Вследствие ЧРК спутниковых сигналов ГЛОНАСС при решении сетевой задачи возникают следующие трудности: 1) кодовые задержки в НАП в измерениях различаются для разных спутников ГЛОНАСС (для разных литерных частот) и для разных приемников, вследствие чего для их описания требуются различные переменные (по числу спутников и приемников), что увеличивает недостаток ранга системы линейных уравнений по сравнению с сетевой задачей GPS, где эти задержки не зависят от номера спутника, и не позволяет оценить ВКП; 2) невозможность вычисления строго целочисленной оценки псевдофазовых неоднозначностей вследствие различия длин волн несущих сигналов спутников ГЛОНАСС с ЧРК. В данной статье на основе теории  $S$ -преобразования [6–8] предлагается такое решение сетевой задачи, при котором целочисленность псевдофазовых неоднозначностей сохраняется не строго, а приближенно и дается оценка условий, при которых это допущение возможно, таким образом, преодолевается вторая проблема (невозможности целочисленной оценки неоднозначностей). Для преодоления первой проблемы (различия кодовых задержек в НАП для разных приемников и спутников) в качестве наземных станций используется НАП одной модели от одного производителя с одинаковыми антеннами (однородная сеть станций) в предположении о том, что кодовые аппаратурные задержки

для такой НАП различаются для разных спутников, однако с точностью до константы совпадают между собой для разной НАП. Это позволяет сократить число переменных, необходимых для описания кодовых задержек в НАП до такого же числа, как в случае сетевой задачи GPS. Таким образом, разрешается первая проблема (различия кодовых аппаратурных задержек). Приводится оценка различия кодовых аппаратурных задержек для используемой НАП, основанная на комбинации Мельбурна–Вуббена.

Из литературы [9] известно, что при использовании внешней информации об ионосферной задержке (ионосферные карты) возможна оценка дробной части кодовых аппаратурных задержек для неоднородной сети станций (НАП от разных производителей), что дает возможность разрешать целочисленную неоднозначность в ГЛОНАСС. В данной статье рассмотрен подход, при котором рассматривается однородная сеть станций. Для устранения ионосферных задержек используются ионосферосвободные комбинации измерений, поэтому внешняя информация не требуется.

Предлагаемое решение сетевой задачи сравнивается с решением такой же задачи по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов (КРК) GPS [3].

## Оценка различия кодовых аппаратурных задержек между различной НАП ГЛОНАСС

Модели ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей  $\rho_{ifr,m}^j$ , м и псевдофаз  $L_{ifr,m}^j$ , м, а также комбинаций Мельбурна–Вуббена  $mw_m^j$ , м с использованием линейной аппроксимации фазовых аппаратурных задержек для  $m$ -й станции и  $j$ -го спутника имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \rho_{ifr,m}^j &= R_m^j + w_m^j \Delta D_m + dT_{\rho,ifr,m} - \\ &\quad - b_{ап,ifr,m}^j - dt_{\rho,ifr}^j + \xi_{\rho,ifr,m}^j, \\ L_{ifr,m}^j &= R_m^j + w_m^j \Delta D_m + dT_{L,ifr,m} - dt_{L,ifr}^j - \\ &\quad - (n_1 - n_2) \lambda_{ifr}^j (N1_m^j + \psi_{01,m}) - \\ &\quad - n_2 \lambda_{ifr}^j (N_{mw,m}^j + \psi_{mw,m}) + \xi_{L,ifr,m}^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 mw_m^j &= B_{mw,m} - b_{NL,m}^j - b_{mw}^j - \\
 &- (n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j(N_{mw,m}^j + \psi_{mw,m}) + \xi_{mw,m}^j.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Смысловое содержание переменных, входящих в (1), описано в [1].

Оценим, на сколько различаются величины *narrow-lane*-комбинаций кодовых аппаратурных задержек  $b_{NL,m}^j$  для различных  $m = \overline{1, M}$  станций сети, сравнивая каждую станцию сети с одной, выбранной в качестве опорной (обозначенной далее  $R$ ). Для этого необходимо получить оценку разности  $b_{NL,m}^j - b_{NL,R}^j$  для  $m = \overline{1, M}$ ,  $m \neq R$  по всем спутникам ГЛОНАСС. Если эти разности будут различаться на константу, значит задержки  $b_{NL,m}^j$  рассматриваемых станций между собой тоже различаются на константу (но в общем случае различаются для разных спутников  $j$ ). Таким образом, можно будет упростить модель измерений (1), в которой для описания комбинаций  $b_{NL,m}^j$  и  $b_{ap,ifr,m}^j$  кодовых аппаратурных задержек  $m$ -й станции используется отдельная переменная. Получить такую оценку можно, усредняя по времени величины комбинаций измерений Мельбурна–Вуббена  $mw_m^j$  для разных станций  $m$  и сравнивая результаты усреднения по различным станциям (образуя первые разности измерений двух станций и вторые разности измерений относительно одного из спутников). Предлагаемый метод основан на идеях, описанных в [10] и [11] («метод дифференциальной калибровки»). Из литературы [10] известно, что комбинации измерений Мельбурна–Вуббена  $mw_m^j$  достаточно стабильны во времени, поэтому в данной статье они полагаются постоянными на интервале усреднения (1 сутки) и для уменьшения влияния шума измерений  $\xi_{mw,m}^j$  используется усреднение  $mw_m^j$  по времени. Однако, в силу неоднозначности измерений Мельбурна–Вуббена  $mw_m^j$ , полученная оценка будет относиться не к самой разности  $b_{NL,m}^j - b_{NL,R}^j$ , а к ее дробной части (остатку от деления на соответствующую длину волны  $(n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j$ ).

При каждом новом заходе спутника в зону видимости НАП и после срывов слежения за спутниковым сигналом (*cycle slip*) целочисленная неоднозначность  $N_{mw,m}^j$  комбинации Мельбурна–Вуббена  $mw_m^j$  будет меняться. Поэтому, прежде чем

усреднять комбинацию Мельбурна–Вуббена  $mw_m^j$ , необходимо скомпенсировать изменения целочисленной неоднозначности  $N_{mw,m}^j$  так, чтобы на всех интервалах видимости (на всем интервале усреднения)  $j$ -го спутника она была одинакова:  $N_{mw,m}^j = N_{0mw,m}^j = \text{const}$ . Тогда оценка средней величины измерения Мельбурна–Вуббена  $\overline{mw}_m^j$ ,  $m$ -й станции по  $j$ -му спутнику будет имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \overline{mw}_m^j &= B_{mw,m} - b_{NL,m}^j - b_{mw}^j - \\
 &- (n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j(N_{0mw,m}^j + \psi_{mw,m}) + \bar{\xi}_{mw,m}^j,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $\bar{\xi}_{mw,m}^j$  — средняя ошибка измерения Мельбурна–Вуббена.

При образовании первых разностей  $\Delta\overline{mw}_{m-R}^j$  оценок  $\overline{mw}_m^j$  (2) между двумя станциями  $m$  и  $R$  по всем спутникам устраняется смещение Мельбурна–Вуббена в аппаратуре  $j$ -го спутника  $b_{mw}^j$ , не зависящее от номера станции (одинаковое для всех станций):

$$\begin{aligned}
 \Delta\overline{mw}_{m-R}^j &= \Delta B_{mw,m-R} - \Delta b_{NL,m-R}^j - \\
 &- (n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j(\Delta N_{0mw,m-R}^j + \Delta\psi_{mw,m-R}) + \\
 &+ \bar{\xi}_{\Delta mw,m-R}^j,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где  $\Delta\overline{mw}_{m-R}^j = \overline{mw}_m^j - \overline{mw}_R^j$ ;  $\Delta B_{mw,m-R} = B_{mw,m} - B_{mw,R}$ ;  $\Delta b_{NL,m-R}^j = b_{NL,m}^j - b_{NL,R}^j$ ;  $\Delta N_{0mw,m-R}^j = N_{0mw,m}^j - N_{0mw,R}^j$ ;  $\Delta\psi_{mw,m-R} = \psi_{mw,m} - \psi_{mw,R}$ ;  $\bar{\xi}_{\Delta mw,m-R}^j = \bar{\xi}_{mw,m}^j - \bar{\xi}_{mw,R}^j$ .

При образовании вторых разностей  $\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r} = \Delta\overline{mw}_{m-R}^j - \Delta\overline{mw}_{m-R}^r$  — разностей оценок  $\Delta\overline{mw}_{m-R}^j$  (3) рассматриваемой пары станций между всеми спутниками и одним выбранным спутником, обозначенным  $r$ , устраняются смещения  $\Delta B_{mw,m-R}$  и  $\Delta\psi_{mw,m-R}$ , не зависящие от номера спутника (одинаковые для всех спутников выбранной пары станций):

$$\begin{aligned}
 \Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r} &= -\Delta\Delta b_{NL,m-R}^{j-r} - \\
 &- (n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j(\Delta\Delta N_{0mw,m-R}^{j-r}) - \\
 &- (n_1 + n_2)\Delta\lambda_{ifr}^{j-r}(\Delta N_{0mw,m-R}^r + \Delta\psi_{mw,m-R}) + \\
 &+ \bar{\xi}_{\Delta\Delta mw,m-R}^{j-r} \approx -\Delta\Delta b_{NL,m-R}^{j-r} - \\
 &- (n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j(\Delta\Delta N_{0mw,m-R}^{j-r}) + \bar{\xi}_{\Delta\Delta mw,m-R}^{j-r},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где  $\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r} = \Delta\overline{mw}_{m-R}^j - \Delta\overline{mw}_{m-R}^r$ ;  $\Delta\Delta b_{NL,m-R}^{j-r} = \Delta b_{NL,m-R}^j - \Delta b_{NL,m-R}^r$ ;  $\Delta\Delta N_{0mw,m-R}^{j-r} = \Delta N_{0mw,m-R}^j - \Delta N_{0mw,m-R}^r$ ;  $\Delta\lambda_{ifr}^{j-r} = \lambda_{ifr}^j - \lambda_{ifr}^r$ ;  $\bar{\xi}_{\Delta\Delta mw,m-R}^{j-r} = \bar{\xi}_{\Delta\Delta mw,m-R}^j - \bar{\xi}_{\Delta\Delta mw,m-R}^r$ . Так как  $(n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j \in (84,034; 84,419)$  см, величина разности длин волн  $(n_1 + n_2)\Delta\lambda_{ifr}^{j-r}$  не превышает 0,39 см для наиболее разнесенных литер  $-7$  и  $+6$ , поэтому слагаемым  $-(n_1 + n_2)\Delta\lambda_{ifr}^{j-r}(\Delta N_{0mw,m-R}^r + \Delta\psi_{mw,m-R})$  в (4) можно пренебречь при условии, что выполняется выравнивание фазовых измерений относительно кодовых (*phase-code alignment*), т. е. неопределенные целые числа  $N_{mw,m}^r$  относительно малы.

Таким образом, вторые разности усредненных комбинаций измерений Мельбурна–Вуббена  $\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r}$  (4) представляют собой неоднозначные оценки вторых разностей кодовых межлитерных задержек  $\Delta\Delta b_{NL,m-R}^{j-r}$   $m$ -й и  $R$ -й станций по  $j$ -му и  $r$ -му спутникам, смещенные на неизвестное целое число длин волн комбинации Мельбурна–Вуббена  $((n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j \approx 0,84$  м).

Так как измерения Мельбурна–Вуббена  $mw_m^j$  в модели (1) и вторые разности  $\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r}$  (4) неоднозначны, необходимо «сдвинуть» их к одному уровню, например к нулю, на целое число длин волн  $(n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j$ :  $(\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r})_0 = \Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r} - \left[ \frac{\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r}}{(n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j} \right] (n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j$ . Далее под операцией  $(a)_0$  понимается вычитание из  $a$  целого числа  $\left[ \frac{a}{(n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j} \right]$  длин волн  $(n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j$ , а под операцией  $[ ]$  — округление до ближайшего целого. Пренебрегая шумом измерений  $\bar{\xi}_{\Delta\Delta mw,m}^j$ , получаем оценку:

$$\begin{aligned} (\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r})_0 &= (-\Delta\Delta b_{NL,m-R}^{j-r})_0 = \\ &= (\Delta b_{NL,m-R}^j - \Delta b_{NL,m-R}^r)_0 = \\ &= ((\Delta b_{NL,m}^j - \Delta b_{NL,R}^j) - (\Delta b_{NL,m}^r - \Delta b_{NL,qR}^r))_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Оценки величин  $(\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r})_0$  (5) были получены для всех станций, использованных в настоящей статье для решения сетевой задачи. Были рас-

смотрены все станции в паре с одной из станций, выбранной в качестве опорной (обозначенной символом  $R$ ). Для всех рассматриваемых станций характерна близость оценок  $(\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r})_0$  (5) к нулю с точностью до  $\sim 0,1$  цикла. Примеры таких оценок для двух пар станций по спутникам ГЛОНАСС и GPS приведены на рис. 1.

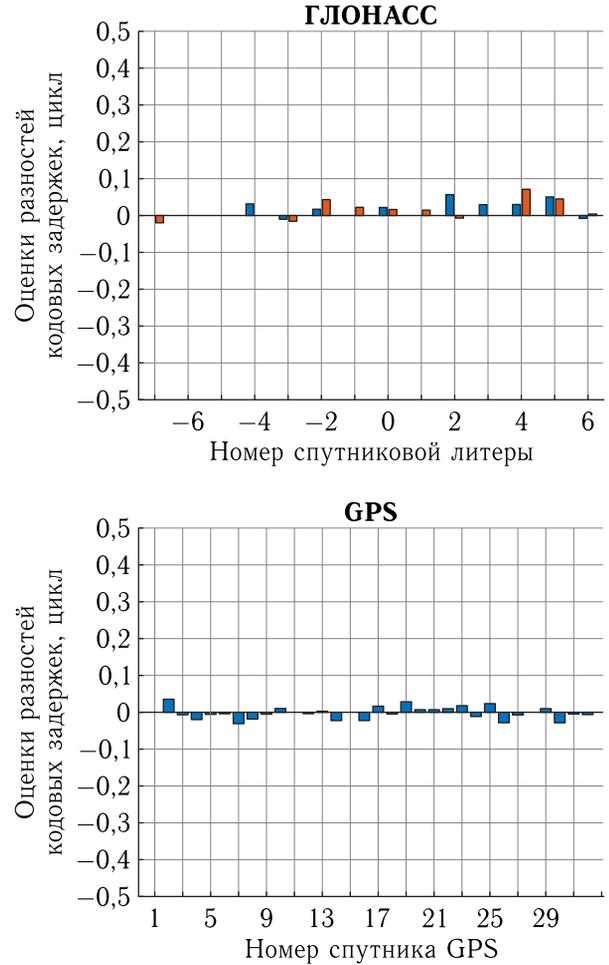


Рис. 1. Характерный пример оценки величин различия кодовых аппаратных задержек для пары станций сети при усреднении на суточном интервале 13.08.2021

На рис. 1 приведены графики зависимости величин  $(\Delta\Delta\overline{mw}_{m-R}^{j-r})_0$  (5), являющихся оценками разности кодовых задержек  $(-\Delta\Delta b_{NL,p-q}^{j-r})_0$  для НАП пары станций, выраженные в циклах, от номеров спутниковых литер  $lit^j$  для спутников ГЛОНАСС (вверху) и номеров спутников GPS (внизу). Так как каждой букве ГЛОНАСС  $lit^j$  соответствуют два антиподных спутника, для букв

приведены по две оценки  $-\Delta\Delta b_{NL,m-R}^{j-r}$  (обозначенные на рисунке оранжевым и синим цветом). Так как на анализируемом интервале времени принимались сигналы не всех спутников в обоих диапазонах  $L1, L2$ , приведены оценки не для всех 24 спутников ГЛОНАСС и 32 GPS. На рис. 1 хорошо видно, что величины  $(\Delta\Delta\overline{m}w_{m-R}^{j-r})_0$  для ГЛОНАСС практически не зависят от номера спутника  $j$  и с точностью до  $\sim 0,1$  цикла равны нулю. Это явление наблюдалось на всех анализируемых станциях. График по спутникам GPS приведен для сравнения. Так как в модели измерений GPS в задаче целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения (ВАМО) кодовые аппаратурные задержки приемника полагаются не зависящими от номера спутника (для любой НАП, независимо от производителя и модели) [2], величины оценок  $(-\Delta\Delta b_{NL,p-q}^{j-r})_0$  для GPS также близки к нулю.

Как видно из выражения (5), из того, что  $(-\Delta\Delta b_{NL,p-q}^{j-r})_0 \approx 0$ , следует, что  $(\Delta b_{NL,m-R}^j)_0 \approx (\Delta b_{NL,m-R}^r)_0 = \text{const}_m$  — разность кодовых аппаратурных задержек  $b_{NL}^j$  двух станций  $m$  и  $R$  одинакова по любому  $j$ -му спутнику. Следовательно, можно предположить, что  $b_{NL,m}^j \approx b_{NL,R}^j + \text{const}_m$  — кодовые аппаратурные задержки двух рассматриваемых станций  $m$  и  $R$  различаются на константу, однако отсюда не следует, что при равенстве между двумя станциями они равны по всем спутникам:  $b_{NL,m}^j \neq b_{NL,m}^k$ .

Получить напрямую оценку разности ионосферосвободных комбинаций кодовых задержек в НАП  $b_{\text{ап},ifr,m}^j$  для пары станций описанным способом невозможно. Можно лишь сделать предположение, что при равенстве *narrow-lane*-комбинаций задержек  $b_{NL,m}^j \approx b_{NL,R}^j + \text{const}_m \forall j$  следует аналогичное равенство и для ионосферосвободных комбинаций задержек  $b_{\text{ап},ifr,m}^j \approx b_{\text{ап},ifr,R}^j + \text{const}_{ifr,m}^j \forall j$  в аппаратуре всех рассматриваемых станций. Результаты обработки реальных измерений не противоречат данной гипотезе.

Таким образом, допуская, что для всех станций рассматриваемой сети кодовые аппаратурные задержки совпадают, их можно выразить как  $b_{NL,m}^j = \text{const}_m + b_{NL}^j$ ,  $b_{\text{ап},ifr,m}^j = \text{const}_{ifr,m}^j + b_{\text{ап},ifr}^j$ , и модели измерений (1) можно переписать в более

простом виде, при котором эти одинаковые кодовые аппаратурные задержки объединяются со смещением Мельбурна–Вуббена спутников  $b_{mw}^j$  и смещением показаний кодовых часов спутников  $dt_{\rho,ifr}^j$ , а члены  $\text{const}_m$  и  $\text{const}_{ifr,m}$  — со смещением Мельбурна–Вуббена приемника  $B_{mw,m}$  и смещением показаний ионосферосвободных кодовых часов приемника  $dT_{\rho,ifr,m}$ :

$$\begin{aligned} \rho_{ifr,m}^j &= R_m^j + w_m^j \Delta D_m + dT'_{\rho,ifr,m} - \\ &\quad - dt'_{\rho,ifr}{}^j + \xi_{\rho,ifr,m}^j, \\ L_{ifr,m}^j &= R_m^j + w_m^j \Delta D_m + dT_{L,ifr,m} - dt_{L,ifr}^j - \\ &\quad - (n_1 - n_2) \lambda_{ifr}^j (N1_m^j + \psi_{01,m}) - \\ &\quad - n_2 \lambda_{ifr}^j (N_{mw,m}^j + \psi_{mw,m}) + \xi_{L,ifr,m}^j, \\ mw_m^j &= B'_{mw,m} - b'_{mw}{}^j - \\ &\quad - (n_1 + n_2) \lambda_{ifr}^j (N_{mw,m}^j + \psi_{mw,m}) + \xi_{mw,m}^j, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $dt'_{\rho,ifr}{}^j = dt_{\rho,ifr}^j + b_{\text{ап},ifr}^j$ ;  $b'_{mw}{}^j = b_{mw}^j + b_{NL}^j$ ,  $dT'_{\rho,ifr,m} = dT_{\rho,ifr,m} + \text{const}_{ifr,m}$ ,  $B'_{mw,m} = B_{mw,m} + \text{const}_m$ .

## Решение сетевой задачи

В описании решения сетевой задачи используются следующие обозначения:  $J$  — число спутников, одновременно видимых всей сетью наземных станций,  $M$  — количество наземных станций,  $J_m$  — количество спутников, видимых  $m$ -й наземной станцией сети  $m = \overline{1, M}$ ,  $J_\Sigma = \sum_{m=1}^M J_m$ . Эти величины соответствуют одному моменту времени, обозначение которого для простоты опущено. Используемые в рассматриваемом решении сетевой задачи ГЛОНАСС обозначения аналогичны случаю сетевой задачи по сигналам GPS, решение которой было рассмотрено в [3, 12] и пользовательской задачи ГЛОНАСС, которая была рассмотрена в [1].

Целью решения сетевой задачи является оценка смещений показаний ионосферосвободных кодовых часов  $dt'_{\rho,ifr}{}^j$ , фазовых часов  $dt_{L,ifr}^j$  и смещений Мельбурна–Вуббена  $b'_{mw}{}^j$  в аппаратуре всех видимых сетью станций спутников  $j = \overline{1, J}$

по измерениям, осуществляемым одновременно всеми  $m = \overline{1, M}$  станциями наземной сети (при этом координаты станций, по которым проводятся измерения, и спутников полагаются известными) [3]. Это позволяет, используя модель измерений (6), записать систему линейаризованных уравнений сетевой задачи (индекс  $ifr$  опущен для простоты):

$$\begin{aligned} \Delta\rho_m^j &= w_m^j \Delta D_m + dT'_{\rho,m} - dt'_{\rho}{}^j + \xi_{\rho,m}^j, \\ \Delta L_m^j &= w_m^j \Delta D_m + dT'_{L,m} - dt'_{L}{}^j - \\ &\quad - (n_1 - n_2) \lambda_{ifr}^j \widetilde{N}1_m^j - n_2 \lambda_{ifr}^j \widetilde{N}_{mw,m}^j + \xi_{L,m}^j, \\ \Delta mw_m^j &= B'_{mw,m} - b'_{mw}{}^j - \\ &\quad - (n_1 + n_2) \lambda_{ifr}^j \widetilde{N}_{mw,m}^j + \xi_{mw,m}^j, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Delta\rho_m^j = \rho_m^j - R_m^j$ ,  $\Delta L_m^j = L_m^j - R_m^j$ ,  $\Delta mw_m^j = mw_m^j$  — невязки ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей  $\rho_m^j$ , псевдофаз  $L_m^j$  и Мельбурна–Вуббена  $mw_m^j$   $j$ -го спутника, сформированные  $m$ -й станцией;  $\widetilde{N}1_m^j = N1_m^j + \psi_{01,m}$ ;  $\widetilde{N}_{mw,m}^j = N_{mw,m}^j + \psi_{mw,m}$  — новые «действительные» неоднозначности, в которые включены начальные фазы  $\psi_{01,m}$ ,  $\psi_{mw,m}$  соответственно каждой  $m$ -й станции, одинаковые для всех  $J_m$  спутников этой  $m$ -й станции;  $j = \overline{1, J_m}$ ;  $m = \overline{1, M}$ . При этом неоднозначности потеряли свои целочисленные свойства аналогично решению пользовательской задачи [1]. Однако, как будет видно в дальнейшем, это не мешает разрешать целочисленную неоднозначность псевдофазовых измерений и не нарушит целочисленность оцениваемых неоднозначностей, так как оцениваться в результате решения сетевой задачи будут не сами величины  $\widetilde{N}1_m^j$  и  $\widetilde{N}_{mw,m}^j$ , а их линейные комбинации. Эти линейные комбинации будем стремиться задать таким образом, чтобы они приобрели целочисленные свойства (благодаря тому, что их действительное смещение одинаковое для всех  $J_m$  спутников для каждой  $m$ -й станции сети при выражении в циклах). Сохранение целочисленности оцениваемых комбинаций неоднозначностей позволяет в пользовательской задаче для целочисленного ВАМО [1] использовать оценки смещений спутниковых часов, полученные в сетевой задаче.

Система линейаризованных уравнений (7) может быть записана в матричном виде:

$$\mathbf{Y}_{net} = \mathbf{H}_{net} \cdot \mathbf{x}_{net} + \mathbf{\Xi}_{net}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{Y}_{net} = [\Delta\rho_m^j \quad \Delta L_m^j \quad \Delta mw_m^j]$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,

$j = \overline{1, J_m}$  — вектор невязок ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей, псевдофаз и Мельбурна–Вуббена ( $m$ ), где измерения упорядочены по станциям, а внутри станций — по спутникам;  $\mathbf{H}_{net}$  — матрица связи вектора исходных переменных  $\mathbf{x}_{net}$  и вектора невязок

зок  $\mathbf{Y}_{net}$ ;  $\mathbf{\Xi}_{net} = [\xi_{\rho,m}^j \quad \xi_{L,m}^j \quad \xi_{mw,m}^j]$   $m = \overline{1, M}$ ,

$j = \overline{1, J_m}$  — вектор случайных ошибок измерений ( $m$ ), элементы которого упорядочены в соответствии с вектором невязок  $\mathbf{Y}_{net}$ ;

$$\mathbf{x}_{net} = [\Delta D^T \quad d\mathbf{T}'_{\rho}{}^T \quad d\mathbf{T}'_L{}^T \quad \mathbf{B}'_{mw}{}^T]$$

$$= [\Delta D^T \quad d\mathbf{T}'_{\rho}{}^T \quad d\mathbf{T}'_L{}^T \quad \mathbf{b}'_{mw}{}^T \quad \widetilde{N}1_{\Sigma}^T \quad \widetilde{N}_{mw}^T]^T \quad (9)$$

— вектор исходных переменных сетевой задачи, в котором  $\Delta\mathbf{D}$  — вектор некомпенсированных частей вертикальных тропосферных задержек ( $m$ ) в точках расположения  $M$  станций наземной сети;  $d\mathbf{T}'_{\rho}$ ,  $d\mathbf{T}'_L$  и  $\mathbf{B}'_{mw}$  — векторы смещений показаний кодовых, фазовых часов и смещений Мельбурна–Вуббена в аппаратуре  $M$  станций наземной сети ( $m$ );  $d\mathbf{t}'_{\rho}$ ,  $d\mathbf{t}'_L$  и  $\mathbf{b}'_{mw}$  — смещения показаний кодовых, фазовых часов и смещений Мельбурна–Вуббена в аппаратуре  $J$  спутников, видимых одновременно всей сетью станций ( $m$ );  $\widetilde{N}1_{\Sigma}^T$ ,  $\widetilde{N}_{mw}^T$  — векторы действительных неоднозначностей (цикл);  $nx = 4M + 3J + 2J_{\Sigma}$  — число исходных переменных сетевой задачи. Остальные обозначения подробно описаны в [3] с той лишь разницей, что в [3] рассматриваются ГНСС–КРК, где

сигналы всех спутников имеют одинаковую длину волны, а в рассматриваемом случае сигналов ГЛОНАСС с ЧРК каждый спутник имеет свою длину волны в соответствии со спутниковой литерой  $lit^j$ .

Сравнение вектора исходных переменных  $\mathbf{x}_{net}$  (9) с соответствующим вектором для GPS из [3] показывает, что они различаются только физическим смыслом некоторых переменных: смещений часов и комбинаций Мельбурна–Вуббена НАП и спутников, а также тем, что начальные фазы  $\psi_{01,m}$ ,  $\psi_{mw,m}$  включены в действительные неоднозначности  $\widetilde{\mathbf{N}}_1, \widetilde{\mathbf{N}}_{mw}$ .

Таким образом, целью решения сетевой задачи является оценка смещений показаний спутниковых часов  $\mathbf{dt}'_\rho, \mathbf{dt}_L$  и  $\mathbf{b}'_{mw}$ , которые применяются в пользовательской задаче.

Для матрицы  $\mathbf{H}_{net}$  была найдена матрица  ${}_{3J_\Sigma \times nx}$

$\mathbf{K}_{net}$ , столбцы которой являются базисными векторами ее ядра (нуль-пространства)  $\text{null}(\mathbf{H}_{net}) = {}_{3J_\Sigma \times nx}$

$$\mathbf{K}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{K1}_{net} & \mathbf{K2}_{net} & \mathbf{K3}_{net} \\ nx \times 3 & nx \times 2M & nx \times 2(J-1) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{K1}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{1}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{1}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{1}_{M \times 1} \\ \mathbf{1}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} \\ \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{1}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} \\ \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{0}_{J \times 1} & \mathbf{1}_{J \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_\Sigma \times 1} & \mathbf{0}_{J_\Sigma \times 1} & \mathbf{0}_{J_\Sigma \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_\Sigma \times 1} & \mathbf{0}_{J_\Sigma \times 1} & \mathbf{0}_{J_\Sigma \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K2}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times M} \\ (n_1 - n_2) \times \Delta \lambda_{ifr} \mathbf{E}_{M \times M} & n_2 \Delta \lambda_{ifr} \mathbf{E}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times M} & (n_1 + n_2) \times \Delta \lambda_{ifr} \mathbf{E}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{J \times M} & \mathbf{0}_{J \times M} \\ \mathbf{0}_{J \times M} & \mathbf{0}_{J \times M} \\ \mathbf{0}_{J \times M} & \mathbf{0}_{J \times M} \\ \mathbf{G}_{net} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{net} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K3}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times (J-1)} & \mathbf{0}_{M \times (J-1)} \\ \mathbf{0}_{J \times (J-1)} & \mathbf{0}_{J \times (J-1)} \\ -(n_1 - n_2) \frac{\mathbf{\Lambda}}{J \times (J-1)} & -n_2 \frac{\mathbf{\Lambda}}{J \times (J-1)} \\ \mathbf{0}_{J \times (J-1)} & -(n_1 + n_2) \frac{\mathbf{\Lambda}}{J \times (J-1)} \\ \mathbf{U}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}' \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{net} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{0} \\ J_1 \times 1 & J_1 \times 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}_2 \\ J_2 \times 1 & J_2 \times 1 \\ \dots & \dots \\ \mathbf{g}_M & \mathbf{0} \\ J_M \times 1 & J_M \times 1 \end{bmatrix};$$

$dfh = 3 + 2(M + J - 1)$  — ранг матрицы  $\mathbf{K}_{net}$  (10)

и, следовательно, недостаток ранга матрицы  $\mathbf{H}_{net}$

и размерность пространства ядра  $\mathcal{K}_{net}$ ;

$\mathbf{1}_{m \times 1}$  —  $m$ -вектор, состоящий из единиц,  $\mathbf{0}_{m \times n}$  —  $m \times n$ -матрица, состоящая из нулей,  $\Delta\lambda_{ifr} = \frac{n_1 c}{n_1^2 - n_2^2 \Delta f_1}$ ,  $\Delta f = 562\,500$  Гц,  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 7$ ,

$\mathbf{E}_{m \times m}$  — единичная  $m \times m$ -матрица,  $\mathbf{\Lambda}_{m \times n}$  —  $m \times n$ -матрица, у которой по главной диагонали стоят

длины волн спутников  $\lambda_{ifr}^j$ , упорядоченные по возрастанию номера спутника  $j$ ,  $\mathbf{g}_m = [g^1 \dots g^m]^T$  —

векторы, состоящие из чисел  $g^j = 2848 + lit^j$  для всех видимых  $m$ -й станцией спутников  $j = 1, J_m$ .

Построение матрицы  $\mathbf{U}'_{J_\Sigma \times (J-1)}$  рассмотрено в [3].

Таким образом, матрица  $\mathbf{H}_{net}$  является сингулярной и система (8) имеет бесчисленное множество решений, смещенных параллельно ядру  $\mathcal{K}_{net}$ .

Сравнение аналитического выражения базисных векторов ядра  $\mathbf{K}_{net}$  (10) для сетевой задачи ГЛОНАСС с соответствующим выражением для сетевой задачи GPS [3], [12] показывает, что эти выражения совпадают с точностью до некоторых коэффициентов и длин волн. Различия объясняются тем, что в ГЛОНАСС используется ЧРК, в отличие от КРК в GPS.

Из того факта, что первые  $M$  строк  $\mathbf{K}_{net}$

равны нулю, следует, что ядро  $\mathcal{K}_{net}$  ортогонально

тем осям системы координат, вдоль которых откладываются первые  $M$  элементов вектора исходных переменных  $\mathbf{x}_{net}$  (9), —  $\mathbf{\Delta D}$  вектор

нескомпенсированных частей вертикальных тропосферных задержек (которым соответствуют нулевые строки матрицы  $\mathbf{K}_{net}$  (10)), подобно сетевой задаче GPS [3, 12]. То есть первые  $M$  элементов вектора исходных переменных  $\mathbf{x}_{net}$  (9)

будут одинаковыми для всего множества решений и могут быть оценены однозначно (без смещения), а остальные элементы вектора исходных

переменных  $\mathbf{x}_{net}$  (9), в числе которых неоднозначности псевдофаз  $\widetilde{\mathbf{N1}}_{J_\Sigma \times 1}$ ,  $\widetilde{\mathbf{N}}_{mw}$  и смещения показаний спутниковых часов  $\mathbf{dt}'_\rho$ ,  $\mathbf{dt}'_L$  и  $\mathbf{b}'_{mw}$ , будут

оцениваться смещенно. Необходимо в бесконечном множестве решений сингулярной системы (8)

найти такое, которое удовлетворяло бы требованиям, предъявляемым к оценкам смещений показаний спутниковых часов  $\mathbf{dt}'_\rho$ ,  $\mathbf{dt}'_L$  и  $\mathbf{b}'_{mw}$  в пользо-

вательской задаче [1], а именно эти оценки могут иметь одинаковое действительное смещение (раз-

личное для каждого типа часов) и оценки  $\mathbf{dt}'_L$

и  $\mathbf{b}'_{mw}$  могут иметь различное, но целочисленное смещение с соответствующими длинами волн [2].

Для нахождения такого решения предлагается использовать теорию  $S$ -преобразования [6–8] по аналогии с решением пользовательской задачи целочисленного ВАМО по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением [1] и с решением сетевой задачи по сигналам ГНСС с кодовым разделением [3].

Для решения сетевой задачи необходимо выбрать  $S$ -пространство  $\mathcal{S}_{net}$  посредством задания

набора (матрицы) его базисных векторов  $\mathbf{S}_{net}$  или базисных векторов  $S^\perp$ -пространства  $\mathbf{S}_{net}^\perp$  —

таким образом, что  $\mathcal{S}_{net} \cap \mathcal{K}_{net} = \emptyset$ .

Тогда можно найти проекцию множества решений системы (8) на выбранное  $S$ -пространство  $\mathcal{S}_{net}$  вдоль ядра  $\mathcal{K}_{net}$ . В таком случае оцени-

ваться в результате такого решения задачи будут не элементы вектора исходных переменных  $\mathbf{x}_{net}$  (9), а элементы вектора оцениваемых перемен-

ных  $\mathbf{x}_{net,s}$ , линейно связанного с вектором  $\mathbf{x}_{net}$  (9)

следующим образом (то есть оцениваться будут линейные комбинации элементов исходного вектора  $\mathbf{x}_{net}$  (9)):

$$\mathbf{x}_{net,s} = \mathbf{P}_{net} \mathbf{x}_{net}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{P}_{net} = \mathbf{E} - \mathbf{K}_{net} \left( (\mathbf{S}_{net}^\perp)^T \mathbf{K}_{net} \right)^{-1} \times$   
 $\times (\mathbf{S}_{net}^\perp)^T$  — матрица проекции на  $S$ -пространство  
 $\mathcal{S}_{net}$ ,  $\mathbf{E}$  — единичная  $nx \times nx$ -матрица.

Оценку вектора  $\mathbf{x}_{net,s}$  (11) можно получить из расширенной (полноранговой) системы уравнений, путем добавления к исходной системе (8) уравнения  $S$ -пространства:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{net} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{net} \\ (\mathbf{S}_{net}^\perp)^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_{net} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}_{net} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Из опыта решения сетевой задачи по сигналам ГНСС с КРК, в частности GPS [3], известен вид матрицы  $\mathbf{S}_{net}^\perp$ , удовлетворяющий указанным требованиям для сигналов GPS. Однако, вследствие того, что матрица связи  $\mathbf{H}_{net}$  в системе уравнений ГЛОНАСС (8) и матрица базисных векторов ядра  $\mathbf{K}_{net}$  отличаются от случая GPS, рассмотренного в [3], необходимо проверить, насколько удовлетворяют требованиям комбинации исходных переменных, полученные при проектировании вдоль ядра ГЛОНАСС  $\mathcal{K}_{net}$  на  $S$ -пространство  $\mathcal{S}_{net}$ , определенное для GPS в [3]. Для этого вычислим матрицу проекции  $\mathbf{P}_{net}$  и аналитическое выражение для вектора оцениваемых переменных  $\mathbf{x}_{net,s}$  (11) для простого примера видимого сетью из 3 станций созвездия 4 спутников из [3]. Введем следующие обозначения для составляющих подвекторов вектора оцениваемых переменных:

$$\mathbf{x}_{net,s} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D}^T & d\mathbf{T}_{\rho,s}^T & d\mathbf{T}_{L,s}^T & \mathbf{B}'_{mw,s}^T \end{bmatrix}^T, \quad (13)$$

где подробнее распишем только интересующие нас подвекторы:

$$\mathbf{dt}'_{\rho,s} = \begin{bmatrix} dt'_\rho{}^1 - dT_{\rho,R} \\ dt'_\rho{}^2 - dT_{\rho,R} \\ dt'_\rho{}^3 - dT_{\rho,R} \\ dt'_\rho{}^4 - dT_{\rho,R} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}'_{mw,s} = \begin{bmatrix} b'_{mw}{}^1 - B_{mw,R} + \lambda_{mw}^1 \tilde{N}_{mw,1}^1 \\ b'_{mw}{}^2 - B_{mw,R} + \lambda_{mw}^2 \tilde{N}_{mw,1}^2 \\ b'_{mw}{}^3 - B_{mw,R} + \lambda_{mw}^3 \tilde{N}_{mw,1}^3 \\ b'_{mw}{}^4 - B_{mw,R} + \lambda_{mw}^1 \tilde{N}_{mw,1}^1 - \\ - \lambda_{mw}^1 \tilde{N}_{mw,2}^1 + \\ + \lambda_{mw}^4 \tilde{N}_{mw,2}^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{dt}_{L,s} = \begin{bmatrix} dt_L^1 - dT_{L,R} + \lambda_{\Delta n}^1 \tilde{N}_{1_1}^1 + \lambda_{n_2}^1 \tilde{N}_{mw,1}^1 \\ dt_L^2 - dT_{L,R} + \lambda_{\Delta n}^2 \tilde{N}_{1_1}^2 + \lambda_{n_2}^2 \tilde{N}_{mw,1}^2 \\ dt_L^3 - dT_{L,R} + \lambda_{\Delta n}^3 \tilde{N}_{1_1}^3 + \lambda_{n_2}^3 \tilde{N}_{mw,1}^3 \\ dt_L^4 - dT_{L,R} + \lambda_{\Delta n}^1 \tilde{N}_{1_1}^1 - \lambda_{\Delta n}^1 \tilde{N}_{1_2}^1 + \\ + \lambda_{\Delta n}^4 \tilde{N}_{1_2}^4 + \lambda_{n_2}^1 \tilde{N}_{mw,1}^1 - \\ - \lambda_{n_2}^1 \tilde{N}_{mw,2}^1 + \lambda_{n_2}^4 \tilde{N}_{mw,2}^4 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{N}}_{1_s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_{1_2}^3 - \tilde{N}_{1_1}^3 + \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_{1_1}^1 - \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_{1_2}^1 \\ 0 \\ \tilde{N}_{1_3}^2 - \tilde{N}_{1_1}^2 + \frac{g^2}{g^1} \tilde{N}_{1_1}^1 - \\ - \frac{g^2}{g^1} \tilde{N}_{1_2}^1 + \frac{g^2}{g^4} \tilde{N}_{1_2}^4 - \frac{g^2}{g^4} \tilde{N}_{1_3}^4 \\ \tilde{N}_{1_3}^3 - \tilde{N}_{1_1}^3 + \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_{1_1}^1 - \\ - \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_{1_2}^1 + \frac{g^3}{g^4} \tilde{N}_{1_2}^4 - \frac{g^3}{g^4} \tilde{N}_{1_3}^4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_{mw,s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_{mw,2}^3 - \tilde{N}_{mw,1}^3 + \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_{mw,1}^1 - \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_{mw,2}^1 \\ 0 \\ \tilde{N}_{mw,3}^2 - \tilde{N}_{mw,1}^2 + \frac{g^2}{g^1} \tilde{N}_{mw,1}^1 - \\ - \frac{g^2}{g^1} \tilde{N}_{mw,2}^1 + \frac{g^2}{g^4} \tilde{N}_{mw,2}^4 - \frac{g^2}{g^4} \tilde{N}_{mw,3}^4 \\ \tilde{N}_{mw,3}^3 - \tilde{N}_{mw,1}^3 + \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_{mw,1}^1 - \\ - \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_{mw,2}^1 + \frac{g^3}{g^4} \tilde{N}_{mw,2}^4 - \frac{g^3}{g^4} \tilde{N}_{mw,3}^4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для краткости длины волн обозначены  $\lambda_{\Delta n}^j = \Delta n \lambda_{ifr}^j$ ,  $\lambda_{n2}^j = n_2 \lambda_{ifr}^j$ ,  $\lambda_{mw}^j = (n_1 + n_2) \lambda_{ifr}^j$ , а символом  $R$  обозначена одна из станций сети, которая выбрана опорной.

Сравнивая полученные аналитические выражения оцениваемых переменных для ГЛОНАСС с аналогичными выражениями для GPS из [3], можно сделать вывод, что комбинации оцениваемых переменных совпадают с точностью до коэффициентов, с которыми исходные переменные входят в эти комбинации. Различия коэффициентов объясняются тем, что в ГЛОНАСС используется ЧРК, в отличие от КРК в GPS. Необходимо оценить, насколько полученные комбинации соответствуют выдвигаемым требованиям и могут ли такие оценки смещений показаний спутниковых часов применяться как ВКП в пользовательской задаче.

Рассмотрим комбинации оцениваемых «действительных» псевдофазовых неоднозначностей (включающие начальные фазы  $\psi_{01,m}$ ,  $\psi_{mw,m}$ ) с тем, чтобы определить, обладают ли они целочисленным свойством и возможно ли использование алгоритмов разрешения неоднозначностей в сетевой задаче ГЛОНАСС. Так как комбинации неоднозначностей  $\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma \times 1}^s$  и  $\tilde{\mathbf{N}}_{mw,s}$  одинаковы, анализ будем про-

водить на примере вектора  $\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma \times 1}^s$  (рассмотрим только его ненулевые элементы):

$$\begin{aligned} & \tilde{N}_2^3 - \tilde{N}_1^3 + \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_1^1 - \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_2^1, \\ & \tilde{N}_3^2 - \tilde{N}_1^2 + \frac{g^2}{g^1} \tilde{N}_1^1 - \frac{g^2}{g^1} \tilde{N}_2^1 + \frac{g^2}{g^4} \tilde{N}_2^4 - \frac{g^2}{g^4} \tilde{N}_3^4, \\ & \tilde{N}_3^3 - \tilde{N}_1^3 + \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_1^1 - \frac{g^3}{g^1} \tilde{N}_2^1 + \frac{g^3}{g^4} \tilde{N}_2^4 - \frac{g^3}{g^4} \tilde{N}_3^4. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим, насколько они отличаются от целых чисел. Для этого перепишем (14) с учетом введенного в (7) выражения  $\tilde{N}_m^j = N_m^j + \psi_{01,m}$  и группируя отдельно целочисленные и нецелочисленные слагаемые:

$$\begin{aligned} & N_2^3 - N_1^3 + \frac{g^3}{g^1} N_1^1 - \frac{g^3}{g^1} N_2^1 + \\ & + \psi_{01,2} \left( 1 - \frac{g^3}{g^1} \right) + \psi_{01,1} \left( \frac{g^3}{g^1} - 1 \right), \\ & N_3^2 - N_1^2 + \frac{g^2}{g^1} (N_1^1 - N_2^1) + \frac{g^2}{g^4} (N_2^4 - N_3^4) + \\ & + \psi_{01,1} \left( \frac{g^2}{g^1} - 1 \right) + \psi_{01,2} \left( \frac{g^2}{g^4} - \frac{g^2}{g^1} \right) + \\ & + \psi_{01,3} \left( 1 - \frac{g^2}{g^4} \right), \\ & N_3^3 - N_1^3 + \frac{g^3}{g^1} (N_1^1 - N_2^1) + \frac{g^3}{g^4} (N_2^4 - N_3^4) + \\ & + \psi_{01,1} \left( \frac{g^3}{g^1} - 1 \right) + \psi_{01,2} \left( \frac{g^3}{g^4} - \frac{g^3}{g^1} \right) + \\ & + \psi_{01,3} \left( 1 - \frac{g^3}{g^4} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Оцениваемые комбинации целочисленных неоднозначностей (15) отличаются от целых чисел за счет присутствия в них действительных слагаемых (начальные фазы  $\psi_{01,m}$ ) и отличия от целых чисел коэффициентов перед неоднозначностями  $\frac{g^i}{g^k}$ .

Так как целые числа  $g^j = 2848 + lit^j$ , а спутниковые литеры ГЛОНАСС  $lit^j = -7, \dots, 6$ , то  $g^j \in [2841; 2854]$ . Принимая во внимание то, что начальные фазы  $|\psi_{01,m}| < 1$  цикла, всеми слагаемыми начальными фазами в (15) можно пренебречь

ввиду малости коэффициентов  $\frac{g^i}{g^k} - 1$  и  $\frac{g^i}{g^k} - \frac{g^i}{g^n}$ , стоящих перед ними.

Для оценки того, насколько отличаются от целых чисел слагаемые типа  $\frac{g^i}{g^k} (N1_{m1}^k - N1_{m2}^k)$ , представим отношение  $\frac{g^i}{g^k}$  в виде  $\frac{g^i}{g^k} = \frac{g^k + \Delta g^{ik}}{g^k} = 1 + \frac{\Delta g^{ik}}{g^k}$ , где  $\Delta g^{ik} = g^i - g^k$ . В наихудшем случае, когда  $\Delta g^{ik} = 2854 - 2841 = 13$  и  $g^k = 2841$ ,  $\frac{\Delta g^{ik}}{g^k} = \frac{13}{2841} \approx 0,00046$  (наибольшее отличие от единицы). Принимая во внимание, что в (15) входит до четырех целочисленных слагаемых с таким коэффициентом, чтобы получить общее действительное смещение оцениваемой комбинации неоднозначностей не более 0,15 цикла, необходимо, чтобы эти четыре целочисленных слагаемых не превосходили  $0,15 / \left( \frac{13}{2841} \cdot 4 \right) \approx 8$ . Таким образом, при решении сетевой задачи необходимо уделять особое внимание выравниванию псевдофазовых измерений относительно кодовых (т.е. уменьшению величин неопределенных целых — псевдофазовых неоднозначностей) и не разрешать неоднозначности таких спутников, действительные оценки неоднозначностей которых сильно отличаются от целых чисел. Хотя эта оценка (8 циклов) дана для наименее благоприятного распределения литер видимых спутников ГЛОНАСС (при наибольшем разбросе величин литер и, следовательно, наибольшем различии длин волн сигналов различных спутников ГЛОНАСС) и вероятность появления именно такого распределения литер при обработке реальных измерений невелика.

Таким образом, можно сделать вывод, что при соблюдении описанных условий оцениваемые комбинации псевдофазовых неоднозначностей можно считать целочисленными и использовать алгоритмы разрешения псевдофазовых неоднозначностей при решении сетевой задачи ГЛОНАСС.

Рассмотрим оцениваемые комбинации смещений спутниковых часов. Анализ выражений для оцениваемых переменных  $\mathbf{x}_{net,s}$  (13) показывает, что переменные  $\mathbf{dt}'_{\rho,s}$  имеют общее действительное

смещение  $dT_{\rho,R}$ , а переменные  $\mathbf{dt}'_{L,s}$  и  $\mathbf{b}'_{mw,s}$  смещены на величины псевдофазовых неоднозначностей, но не всегда эти смещения имеют одну длину волны (смещающие неоднозначности входят в комбинации с коэффициентами длин волн соответствующих спутников). Так как комбинации смещающих переменных для векторов  $\mathbf{dt}'_{L,s}$  и  $\mathbf{b}'_{mw,s}$  одинаковы, рассмотрим только вектор  $\mathbf{b}'_{mw,s}$ .

Оценим величины смещений оценок  $\mathbf{b}'_{mw}$  — элементов вектора  $\mathbf{b}'_{mw,s}$ . Для этого перепишем его аналитическое выражение с учетом введенного в (7) выражения  $\tilde{N}_{mw,m}^j = N_{mw,m}^j + \psi_{mw,m}$ :

$$\mathbf{b}'_{mw,s} = \begin{bmatrix} b'_{mw}{}^1 - B_{mw,R} + \lambda_{mw}^1 \psi_{mw,1} + \lambda_{mw}^1 N_{mw,1}^1 \\ b'_{mw}{}^2 - B_{mw,R} + \lambda_{mw}^2 \psi_{mw,1} + \lambda_{mw}^2 N_{mw,1}^2 \\ b'_{mw}{}^3 - B_{mw,R} + \lambda_{mw}^3 \psi_{mw,1} + \lambda_{mw}^3 N_{mw,1}^3 \\ b'_{mw}{}^4 - B_{mw,R} + \lambda_{mw}^1 \psi_{mw,1} + \\ + \lambda_{mw}^1 N_{mw,1}^1 - \lambda_{mw}^1 N_{mw,2}^1 + \\ + \lambda_{mw}^4 N_{mw,2}^4 + \psi_{mw,2} (\lambda_{mw}^4 - \lambda_{mw}^1) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Так как различие длин волн ГЛОНАСС  $\lambda_{mw}^j$  не превышает величины 0,39 см для наиболее разнесенных литер  $-7$  и  $+6$  и начальные фазы  $|\psi_{mw,m}| < 1$  цикл, слагаемым  $\psi_{mw,2} (\lambda_{mw}^4 - \lambda_{mw}^1)$  в (16) можно пренебречь ввиду его малости. Аналогично пояснению к (4) в (16) также можно пренебречь различием длин волн  $\lambda_{mw}^j$ . В таком случае оцениваемые комбинации  $\mathbf{b}'_{mw,s}$  имеют общее действительное смещение  $-B_{mw,R} + \lambda_{mw}^1 \psi_{mw,1}$  и каждая оценка имеет свое целочисленное смещение.

Таким образом, полученные в результате решения сетевой задачи оценки смещений показаний спутниковых часов  $\mathbf{dt}'_{\rho,s}$ ,  $\mathbf{dt}'_{L,s}$  и  $\mathbf{b}'_{mw,s}$  годятся для использования в решении пользовательской задачи целочисленного ВАМО. Кроме того, несмотря на то, что вектор исходных переменных ГЛОНАСС  $\mathbf{x}_{net}$  (9) отличается физическим смыслом некоторых переменных от аналогичного вектора GPS [3], оцениваемые комбинации  $\mathbf{x}_{net,s}$  (13) получились практически такие же, как в GPS, с точностью

до некоторых коэффициентов, различие которых объясняется ЧРК, используемым в ГЛОНАСС.

Остальная обработка измерений ГЛОНАСС аналогична GPS, алгоритмы этой обработки были описаны в [3].

## Примеры результатов обработки реальных измерений

Сетевая задача была решена на суточном интервале для локальной сети из 6 станций, оборудованных НАП одной модели от одного производителя и одинаковыми антеннами. Расположение станций сети показано на рис. 2. Для вычисления координат спутников GPS использовались быстрые (*rapid*) эфемериды от службы IGS, а для спутников ГЛОНАСС — от ИАЦ КВНО АО «ЦНИИмаш». Для оценки смещений показаний спутниковых часов  $\mathbf{dt}'_{\rho}$ ,  $\mathbf{dt}'_L$  и  $\mathbf{b}'_{mw}$  использовались модели измерений (6) с одинаковыми кодовыми аппаратными задержками по различным станциям. При решении применялись алгоритмы разрешения целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений [4, 5] только к оценкам неоднозначностей Мельбурна–Вуббена  $\tilde{N}_{mw,s}^j$ .

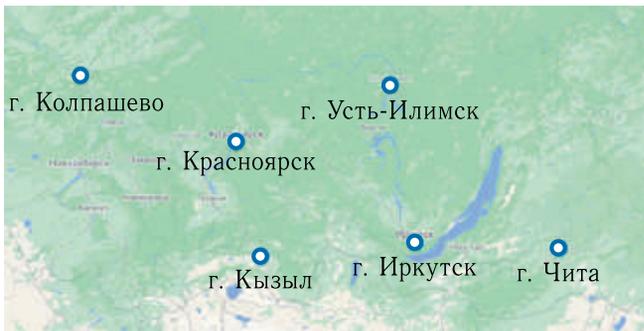


Рис. 2. Локальная сеть станций, используемых для решения сетевой задачи

Для решения сетевой задачи совместно использовались созвездия GPS и ГЛОНАСС. Однако, кроме некомпенсированной части вертикальной тропосферной задержки  $\Delta \mathbf{D}$ , в уравнениях для измерений GPS и ГЛОНАСС нет общих переменных, поэтому при решении сетевой задачи совместное использование GPS и ГЛОНАСС не приводит

к такому значительному увеличению избыточности системы уравнений и ощутимому улучшению решения, как при решении пользовательской задачи, которое было рассмотрено в [1]. Преимущество совместного использования GPS и ГЛОНАСС для решения сетевой задачи состоит в том, что при отсутствии на какой-то момент времени (по какой-либо причине) решения по одной из систем тропосферная задержка тем не менее непрерывно оценивается (по спутникам другой системы).

На рис. 3 приведены оценки смещения показаний спутниковых кодовых и фазовых часов,

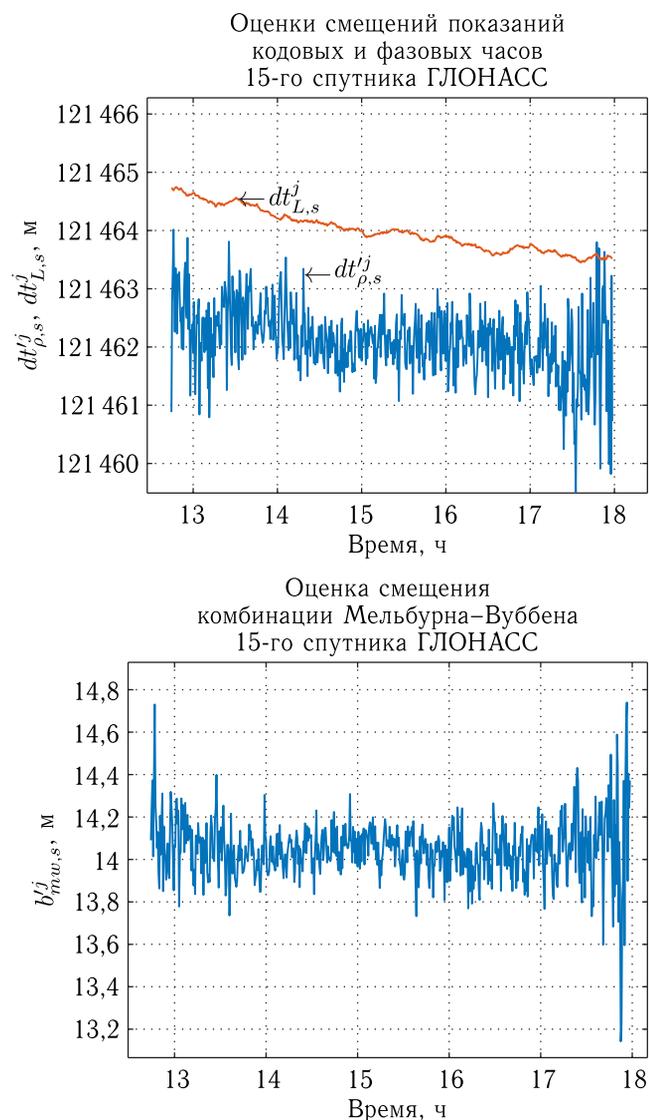


Рис. 3. Графики оценок смещений показаний спутниковых часов и комбинации Мельбурна–Вуббена для 15-го спутника ГЛОНАСС

а также комбинации Мельбурна–Вуббена  $\mathbf{dt}'_{\rho}$ ,  $\mathbf{dt}'_L$  и  $\mathbf{b}'_{mw}$  для одного из спутников (№ 15) ГЛОНАСС, полученные в результате решения сетевой задачи. Так как шум псевдофазовых измерений значительно меньше, чем шум измерений псевдодалностей, оценки смещений показаний фазовых часов спутника  $dt'_{L,s}$  «зашумлены» меньше, чем оценки показаний кодовых часов  $dt'_{\rho,s}$ . Также на рисунке видно, что оценка смещения Мельбурна–Вуббена спутника  $b'_{mw,s}$  достаточно стабильна во времени. Шум этих оценок увеличивается на границе интервала видимости спутника, так как он уходит из зоны видимости сети станций и его угол места уменьшается.

На рис. 4 приведены действительные оценки неоднозначностей (до их целочисленного разрешения) комбинации Мельбурна–Вуббена  $\tilde{N}^j_{mw,s}$ , оцениваемые на суточном интервале. Видно, что эти оценки сходятся к целым числам.

Временные корректирующие поправки, представленные на рис. 3, были использованы для

решения пользовательской задачи [1] по данным измерений реального навигационного приемника. Продемонстрировано достижение сантиметровой точности местоопределения (трехмерная ошибка менее 5 см) и значительное сокращение времени сходимости к точному решению (рис. 5). Проведенные эксперименты свидетельствуют об адекватности математических моделей измерений, использованных в данной статье, свойствам реальных измерений и приемлемости применения на практике использованных в статье допущений.

На рис. 5 показан график зависимости трехмерной ошибки местоопределения НАП, полученный в результате обработки реальных измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением. Для коррекции смещений показаний спутниковых часов были использованы временные поправки, полученные в результате решения сетевой задачи. Синей пунктирной линией показано действительное решение (до разрешения целочисленной неоднозначности), а красной сплошной — целочисленное решение (после разрешения неоднозначности). Видно,

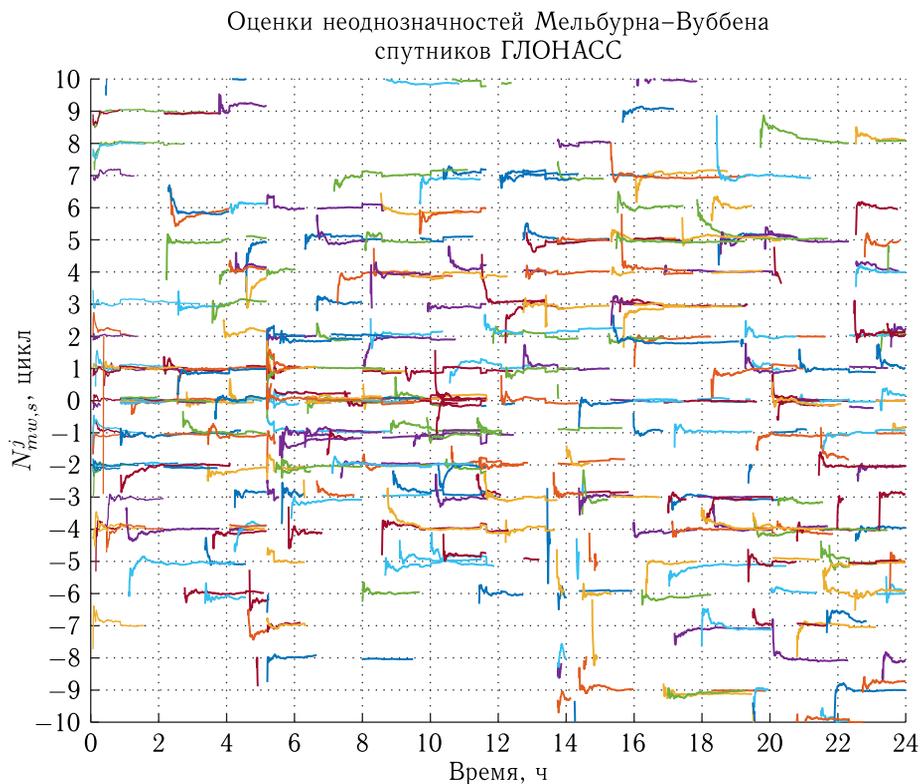


Рис. 4. Оценки неоднозначностей Мельбурна–Вуббена  $\tilde{N}^j_{mw,s}$

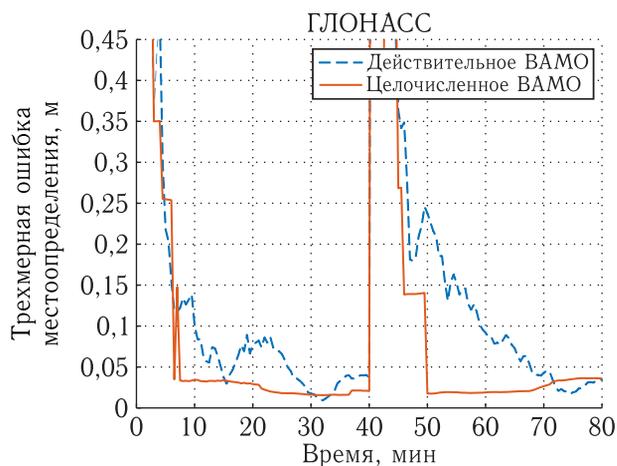


Рис. 5. Ошибка определения координат потребителя с использованием временных корректирующих поправок

что в результате целочисленного разрешения неоднозначности сантиметровая точность достигается в течение 10 минут обработки. На 40-й минуте обработки процесс сходимости намеренно был начат сначала для демонстрации оперативности сходимости целочисленного решения к сантиметровому уровню точности.

## Заключение

Описаны особенности алгоритмов определения смещений показаний часов спутников ГЛОНАСС с частотным разделением каналов для ВАМО с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по измерениям сети наземных станций, оборудованных однотипной НАП. На примере обработки реальных измерений продемонстрирована возможность вычисления таких поправок.

Предложена методика сравнения *narrow-lane*-комбинаций кодовых аппаратурных задержек  $b_{NL,m}^j$  для используемых станций при помощи обработки комбинаций измерений Мельбурна–Вуббена.

В результате обработки реальных измерений продемонстрирована возможность использования алгоритмов разрешения целочисленной неоднозначности Мельбурна–Вуббена при решении сетевой задачи ГЛОНАСС. При нестрогом сохранении целочисленности оцениваемых комбинаций неоднозначностей необходимо выполнять выравнивание фазовых измерений относительно кодовых.

В наименее благоприятном случае видимого созвездия (большой разброс литер видимых спутников) требуется, чтобы величины неопределенных целых не превышали 8 циклов.

Благодаря тому, что математические модели измерений ГЛОНАСС представлены в виде, схожем с моделями GPS, практически не требуется разработка дополнительного программного обеспечения для работы с сигналами ГЛОНАСС. Аналитические выражения векторов и матрицы, используемых при обработке GPS и ГЛОНАСС, схожи.

## Список литературы

1. Бабурин А.А. Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2022, т. 9, вып. 4. С. 47–58.
2. Поваляев А.А., Подкорытов А.Н., Никитин С.А., Филимонова Д.В. Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2019, т. 6, вып. 1. С. 4–16.
3. Поваляев А.А., Подкорытов А.Н., Никитин С.А., Филимонова Д.В. Определение временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2019, т. 6, вып. 2. С. 3–16.
4. Поваляев А.А. Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат. М.: Радиотехника, 2008. 328 с.
5. Teunissen P.J.G. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: A method for fast GPS integer ambiguity estimation // Journal of Geodesy, 1995, 70. P. 65–82.
6. de Jonge P.J.. A processing Strategy for the Application of the GPS in Networks. Publications on Geodesy 46. Delft, August 1998.
7. Teunissen P.J.G. Generalized Inverses, Adjustment the Datum Problem and S-transformations. Preprint.

- Delft University of Technology. Reports of the Department of Geodesy Mathematical and Physical Geodesy, 1984. 47 p.
8. *Подкорытов А. Н.* Высокоточное местоопределение в глобальных навигационных спутниковых системах в абсолютном режиме за счет разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений. Дисс... канд. техн. наук. М., 2014. 195 с.
  9. *Jianghui Geng, Yehuda Bock.* GLONASS fractional-cycle bias estimation across inhomogeneous receivers for PPP ambiguity resolution // Article in Journal of Geodesy, 2015.
  10. *Скакун И. О.* Разработка метода сравнения шкал времени по сигналам ГЛОНАСС с учетом целочисленного свойства параметров неоднозначности фазовых измерений. Дисс... канд. техн. наук. Менделеево, 2017. 113 с.
  11. *Печерица Д. С.* Метод калибровки навигационной аппаратуры потребителей ГЛОНАСС с использованием эталонов, прослеживаемых к государственным первичным эталонам единиц величин. Дисс... канд. техн. наук. Менделеево, 2018. 123 с.
  12. *Поваляев А. А., Бабурин А. А., Подкорытов А. Н.* Применение теории решетчатых упаковок в задаче определения временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям в ГНСС с кодовым разделением // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2021, т. 8, вып. 3. С. 48–62.

Дата поступления рукописи  
в редакцию 11.01.2023  
Дата принятия рукописи  
в печать 24.02.2023