

УДК 629.78 DOI 10.30894/issn2409-0239.2022.9.4.47.58

Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местопределении с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов

А. А. Бабурин, contact@spacecorp.ru

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются алгебраические основы решения задачи определения высокоточных абсолютных координат потребителя по сигналам ГЛОНАСС с частотным разделением каналов с использованием высокоточных корректирующих поправок. При обработке осуществляется разрешение неоднозначности целочисленностей псевдофаз. Это позволяет резко сократить время, необходимое для достижения сантиметровой точности местопределения. Используется линейная аппроксимация фазо-частотной характеристики навигационной аппаратуры потребителя ГЛОНАСС. Для устранения влияния различия кодовых межлитерных задержек сигналов ГЛОНАСС используются измерения приемников одного производителя.

Продемонстрировано значительное (в 8 раз) уменьшение времени сходимости до сантиметрового уровня точности и увеличение надежности решения (уменьшение вероятности появления аномальных ошибок) при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS.

Ключевые слова: спутниковая навигация, ГЛОНАСС, целочисленные высокоточные абсолютные местопределения (целочисленное ВАМО), сигналы с частотным разделением, разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений

Algebraic Issues of Integer Precise Point Positioning with GLONASS FDMA Signals

A. A. Baburin, contact@spacecorp.ru

Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation

Abstract. This article considers algebraic issues of integer precise point positioning with GLONASS FDMA signals. Precise orbits and satellite clocks are used. Ambiguity resolution is carried out to reduce the convergence time. Linear approximation for GLONASS phase response is used. To eliminate the influence of different GLONASS inter-frequency code biases, measurements of receivers of the same manufacturer are used.

A significant (by a factor of 8) decrease in the convergence time to the centimeter level of accuracy and an increase in the reliability of the solution (decrease in the probability of anomalous errors) are demonstrated when using GLONASS and GPS in conjunction.

Keywords: satellite navigation, GLONASS, integer precise point positioning (integer PPP, PPP-AR), FDMA signals, phase ambiguity resolution (AR)

Математические модели измерений псевдодальностей и псевдофаз в ГЛОНАСС

Основной проблемой целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения (целочисленного ВАМО, *integer PPP, PPP-AR*) по сигналам ГЛОНАСС является различие аппаратурных кодовых и фазовых задержек в измерениях разных спутников. Это различие возникает вследствие используемого в ГЛОНАСС частотного разделения каналов (ЧРК) [1]. Для преодоления проблемы различия фазовых аппаратурных задержек в настоящей статье предлагается использовать допущение о линейности фазочастотной характеристики навигационной аппаратуры потребителя (НАП) ГЛОНАСС [2–4]:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{ан}1}^j &= \psi_{\text{ан}1}^0 + \dot{\psi}_{\text{ан}1} \cdot \Delta f_1 \cdot \text{lit}^j, \\ \psi_{\text{ан}2}^j &= \psi_{\text{ан}2}^0 + \dot{\psi}_{\text{ан}2} \cdot \Delta f_2 \cdot \text{lit}^j, \quad j = \overline{1, J_i},\end{aligned}\quad (1)$$

где $j = \overline{1, J_i}$ — номер навигационного космического аппарата (НКА) ГЛОНАСС; J_i — число отслеживаемых НАП спутников ГЛОНАСС в i -й момент времени; $\psi_{\text{ан}1}^j, \psi_{\text{ан}2}^j$ — фазовые аппаратурные задержки на частотах $f1^j = f1^0 + \Delta f_1 \cdot \text{lit}^j = \Delta f_1(2848 + \text{lit}^j)$ Гц, $f2^j = f2^0 + \Delta f_2 \cdot \text{lit}^j = \Delta f_2(2848 + \text{lit}^j)$ Гц; lit^j — номер частотного канала (литеры), используемого j -м НКА, одинаковый для одного и того же спутника в двух частотных диапазонах L1, L2, $\text{lit}^j = -7 \dots + 6$; $\Delta f_1 = 562\,500$ Гц и $\Delta f_2 = 437\,500$ Гц — частотные сдвиги между соседними частотными каналами ГЛОНАСС соответственно в первом L1 и втором L2 диапазонах; $\psi_{\text{ан}1}^0, \psi_{\text{ан}2}^0$ — фазовые задержки на частотах $f1^0 = 1602$ МГц, $f2^0 = 1246$ МГц соответственно, при этом в общем случае полагается, что $\psi_{\text{ан}1}^0 \neq \psi_{\text{ан}2}^0$; $\dot{\psi}_{\text{ан}1}, \dot{\psi}_{\text{ан}2}$ — наклоны фазочастотных характеристик НАП в первом L1 и втором L2 диапазонах ГЛОНАСС соответственно, при этом в общем случае предполагается, что $\dot{\psi}_{\text{ан}1} \neq \dot{\psi}_{\text{ан}2}$. Для ГЛОНАСС известно отношение частот [1] $\frac{f1^0}{f2^0} = \frac{\Delta f_1}{\Delta f_2} = \frac{9}{7} = \frac{n_1}{n_2}$, где далее $n_1 = 9, n_2 = 7$.

Сумма фазовых задержек в НАП ГЛОНАСС складывается из аппаратурных задержек, аппрок-

симированных линейными функциями частоты (номера литеры lit^j) (1) и начальных фаз приемника, одинаковых для всех спутников ГЛОНАСС при выражении в циклах:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{НАП}1}^j &= \psi_{\text{ан}1}^0 + \dot{\psi}_{\text{ан}1} \cdot \Delta f_1 \cdot \text{lit}^j + \psi_1, \\ \psi_{\text{НАП}2}^j &= \psi_{\text{ан}2}^0 + \dot{\psi}_{\text{ан}2} \cdot \Delta f_2 \cdot \text{lit}^j + \psi_2, \quad j = \overline{1, J_i},\end{aligned}\quad (2)$$

где ψ_1, ψ_2 — начальные фазы НАП в циклах в диапазонах L1, L2 соответственно, одинаковые для всех спутников при выражении в циклах в одном диапазоне частот, но в общем случае отличающиеся для L1 и L2 ($\psi_1 \neq \psi_2$). Выразим фазовые задержки (2) как функции частот несущих колебаний.

$$\begin{aligned}\psi_{\text{НАП}1}^j &= \dot{\psi}_{\text{ан}1}(f1^0 + \Delta f_1 \cdot \text{lit}^j) + \\ &+ \psi_1 + (\psi_{\text{ан}1}^0 - \dot{\psi}_{\text{ан}1} f1^0), \\ \psi_{\text{НАП}2}^j &= \dot{\psi}_{\text{ан}2}(f2^0 + \Delta f_2 \cdot \text{lit}^j) + \\ &+ \psi_2 + (\psi_{\text{ан}2}^0 - \dot{\psi}_{\text{ан}2} f2^0), \quad j = \overline{1, J_i}.\end{aligned}\quad (3)$$

Введем обозначения $\psi_{01} = \psi_1 + (\psi_{\text{ан}1}^0 - \dot{\psi}_{\text{ан}1} f1^0)$ и $\psi_{02} = \psi_2 + (\psi_{\text{ан}2}^0 - \dot{\psi}_{\text{ан}2} f2^0)$, которые являются неизвестными константами, и учтем, что $f1^0 + \Delta f_1 \cdot \text{lit}^j = f1^j$ и $f2^0 + \Delta f_2 \cdot \text{lit}^j = f2^j$. Тогда выражение для суммы фазовых задержек в НАП ГЛОНАСС, выраженной в циклах, принимает желаемый вид:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{НАП}1}^j &= \dot{\psi}_{\text{ан}1} f1^j + \psi_{01}, \\ \psi_{\text{НАП}2}^j &= \dot{\psi}_{\text{ан}2} f2^j + \psi_{02}, \quad j = \overline{1, J_i}.\end{aligned}\quad (4)$$

При выражении (4) в метрах:

$$\begin{aligned}\lambda 1^j \psi_{\text{НАП}1}^j &= c \cdot \dot{\psi}_{\text{ан}1} + \lambda 1^j \psi_{01}, \\ \lambda 2^j \psi_{\text{НАП}2}^j &= c \cdot \dot{\psi}_{\text{ан}2} + \lambda 2^j \psi_{02}, \quad j = \overline{1, J_i},\end{aligned}\quad (5)$$

где $c = 299\,792\,458$ м/с — скорость света; $\lambda 1^j = c/f1^j = c/(\Delta f_1(2848 + \text{lit}^j))$, $\lambda 2^j = c/f2^j = c/(\Delta f_2(2848 + \text{lit}^j))$ — длины волн несущих колебаний, излучаемых j -м спутником ГЛОНАСС.

Принятое допущение (1) позволяет с использованием (5) записать математические модели для измерений псевдодальностей $\rho_{1,i}^j, \rho_{2,i}^j$ и псевдофаз $L_{1,i}^j, L_{2,i}^j$ на исходных частотах в ГЛОНАСС с различными кодовыми и фазовыми аппаратурными задержками на спутниках и в НАП в виде, представленном в таблице.

Таблица. Математические модели измерений псевдодальностей $\rho_{1,i}^j, \rho_{2,i}^j$ и псевдофаз $L_{1,i}^j, L_{2,i}^j$ на исходных частотах в двух диапазонах ГЛОНАСС с различными кодовыми и фазовыми аппаратурными задержками [7]

Параметр	Геометрия	Влажная тропосфера	Смещение показаний часов НАП	Кодовые и фазовые аппаратурные задержки в НАП	Смещение шкалы времени НКА	Кодовые и фазовые задержки в аппаратуре НКА	Ионосферные задержки в диапазонах L1, L2	Целочисленные неоднозначности	Ошибки измерений
$\rho_{1,i}^j =$	R_i^j	$+w_i^j \Delta D_i$	$+dT_i$	$-b_{ан1}^j$	$-dt_i^j$	$-b_{\rho1}^j$	$+I_{1,i}^j$		$+\xi_{\rho1,i}^j$
$\rho_{2,i}^j =$	R_i^j	$+w_i^j \Delta D_i$	$+dT_i$	$-b_{ан2}^j$	$-dt_i^j$	$-b_{\rho2}^j$	$+\gamma I_{1,i}^j$		$+\xi_{\rho2,i}^j$
$L_{1,i}^j =$	R_i^j	$+w_i^j \Delta D_i$	$+dT_i$	$-c \cdot \dot{\psi}_{ан1}^j - \lambda 1^j \psi_{01}^j$	$-dt_i^j$	$-\lambda 1^j \psi_{01}^j$	$-I_{1,i}^j$	$-\lambda 1^j N 1^j$	$+\xi_{L1,i}^j$
$L_{2,i}^j =$	R_i^j	$+w_i^j \Delta D_i$	$+dT_i$	$-c \cdot \dot{\psi}_{ан2}^j - \lambda 2^j \psi_{02}^j$	$-dt_i^j$	$-\lambda 2^j \psi_{02}^j$	$-\gamma I_{1,i}^j$	$-\lambda 2^j N 2^j$	$+\xi_{L2,i}^j$

Примечание. Нижний индекс i обозначает номер момента времени, к которому относятся измерения

Здесь R_i^j — расстояние (м) между фазовым центром антенны НАП, координаты x, y, z которого являются искомыми величинами, и фазовым центром антенны j -го спутника ГЛОНАСС в i -й момент времени; ΔD_i — некомпенсированная часть влажной составляющей вертикальной тропосферной задержки (м) в точке расположения НАП; w_i^j — функция отображения влажной составляющей вертикальной тропосферной задержки в наклонную в соответствии с углом места j -го спутника на i -й момент времени; $\gamma = (f1^j/f2^j)^2 = (\lambda 2^j/\lambda 1^j)^2 = (n_1/n_2)^2 \approx 1,653$. Остальные обозначения указаны в таблице.

Модели, представленные в таблице, относятся к измерениям, в которые внесены поправки на основную часть наклонной тропосферной задержки, приливные эффекты (твердотельные, океанические, полярные), смещения фазовых центров антенн НАП и НКА, релятивистские эффекты, гравитационные смещения в измерениях, смещения в фазовых измерениях, определяемые взаимной ориентацией антенн НКА и НАП (wind-up эффект), систематическое смещение в измерениях, связанное с неточностью знания орбит НКА. Алгоритмам вычисления этих поправок посвящена обширная литература, например [5]. Многолучевые искажения измерений в данной работе не рассматриваются. Предполагается, что они подавляются аппаратурными и организационными методами.

Для исключения влияния ионосферы в ГЛОНАСС обычно образуют так называемые

ионосферосвободные линейные комбинации измерений на исходных частотах. К измерениям необходимо добавить третью ионосферосвободную комбинацию Мельбурна–Вуббена для того, чтобы уменьшить вероятность появления аномальных ошибок (неправильного разрешения целочисленных неоднозначностей псевдофазовых измерений) [2, 6, 7]:

$$\begin{aligned} \rho_{ifr,i}^j &= \frac{n_1^2 \rho_{1,i}^j - n_2^2 \rho_{2,i}^j}{n_1^2 - n_2^2}, \\ L_{ifr,i}^j &= \frac{n_1^2 L_{1,i}^j - n_2^2 L_{2,i}^j}{n_1^2 - n_2^2}, \\ mw_i^j &= \frac{n_1 L_{1,i}^j - n_2 L_{2,i}^j}{n_1 - n_2} - \frac{n_1 \rho_{1,i}^j + n_2 \rho_{2,i}^j}{n_1 + n_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для трех рассмотренных комбинаций $\rho_{ifr,i}^j, L_{ifr,i}^j, mw_i^j$ справедливы следующие математические модели:

$$\begin{aligned} \rho_{ifr,i}^j &= R_i^j + w_i^j \Delta D_i + dT_{\rho,ifr,i} - \\ &\quad - b_{ан,ifr}^j - dt_{\rho,ifr,i}^j + \xi_{\rho,ifr,i}^j, \\ L_{ifr,i}^j &= R_i^j + w_i^j \Delta D_i + dT_{L,ifr,i} - \lambda_{ifr}^j \psi_{ifr,i} - \\ &\quad - dt_{L,ifr,i}^j - \lambda_{ifr}^j N_{ifr}^j + \xi_{L,ifr,i}^j, \\ mw_i^j &= B_{mw} - (n_1 + n_2) \lambda_{ifr}^j \psi_{mw} - b_{NL}^j - \\ &\quad - b_{mw}^j - (n_1 + n_2) \lambda_{ifr}^j N_{mw}^j + \xi_{mw,i}^j, \end{aligned} \quad (7)$$

где $dT_{\rho,ifr,i} = dT_i$; $dT_{L,ifr,i} = dT_i - \frac{n_1^2 c \dot{\psi}_{ан1} - n_2^2 c \dot{\psi}_{ан2}}{n_1^2 - n_2^2}$,

$j = \overline{1, J_i}$ — смещение показаний ионосферосвободных кодовых и фазовых часов НАП на i -й момент

времени; $b_{\text{ан},ifr}^j = \frac{n_1^2 b_{\text{ан}1}^j - n_2^2 b_{\text{ан}2}^j}{(n_1^2 - n_2^2)}$ — ионосферосвободная линейная комбинация аппаратурных кодовых задержек j -го НКА в НАП; $dt_{\rho,ifr,i}^j = dt_i^j + \frac{n_1^2 b_{\rho 1}^j - n_2^2 b_{\rho 2}^j}{n_1^2 - n_2^2}$; $dt_{L,ifr,i}^j = dt_i^j + \frac{n_1^2 \lambda 1^j \psi_{01}^j - n_2^2 \lambda 2^j \psi_{02}^j}{n_1^2 - n_2^2}$ — смещение показаний ионосферосвободных кодовых и фазовых часов j -го НКА на i -й момент времени; $\lambda_{ifr}^j = \frac{\lambda 1^j \lambda 2^j}{n_1 \lambda 2^j - n_2 \lambda 1^j} = \frac{n_1}{n_1^2 - n_2^2} \lambda 1^j = \frac{n_2}{n_1^2 - n_2^2} \lambda 2^j$ — ионосферосвободная длина волны (для $lit^j = 0$ $\lambda_{ifr}^j \approx 0,0526321$ м $\approx 5,3$ см);

$$\psi_{ifr} = n_1 \psi_{01} - n_2 \psi_{02} \quad (8)$$

— ионосферосвободная начальная фаза НАП, которая не зависит от индекса j , т. е. является одинаковой для всех принимаемых спутниковых сигналов ГЛОНАСС;

$$N_{ifr}^j = n_1 N 1^j - n_2 N 2^j \quad (9)$$

— ионосферосвободная линейная целочисленная комбинация целочисленностей $N 1^j$, $N 2^j$ псевдофазовых измерений на исходных частотах $f 1^j$, $f 2^j$; $B_{mw} = -\frac{(n_1 c \dot{\psi}_{\text{ан}1} - n_2 c \dot{\psi}_{\text{ан}2})}{(n_1 - n_2)}$; $b_{mw}^j = (n_1 + n_2) \lambda_{ifr}^j (\psi_{01}^j - \psi_{02}^j) - \frac{n_1 b_{\rho 1}^j + n_2 b_{\rho 2}^j}{(n_1 + n_2)}$ — смещения комбинаций Мельбурна–Вуббена в НАП и аппаратуре j -го НКА; $b_{NL}^j = \frac{n_1 b_{\text{ан}1}^j - n_2 b_{\text{ан}2}^j}{n_1 + n_2}$ — *narrow-lane* комбинации кодовых межлитерных задержек j -го НКА;

$$\psi_{mw} = \psi_{01} - \psi_{02} \quad (10)$$

— начальная фаза НАП Мельбурна–Вуббена, которая так же, как ψ_{ifr} (8), не зависит от индекса j , т. е. является одинаковой для всех принимаемых спутниковых сигналов;

$$N_{mw}^j = N 1^j - N 2^j \quad (11)$$

— целочисленность Мельбурна–Вуббена;

$$\begin{aligned} \xi_{\rho,ifr,i}^j &= \frac{n_1^2 \xi_{\rho 1,i}^j - n_2^2 \xi_{\rho 2,i}^j}{n_1^2 - n_2^2}, \quad \xi_{L,ifr,i}^j = \\ &= \frac{n_1^2 \xi_{L 1,i}^j - n_2^2 \xi_{L 2,i}^j}{n_1^2 - n_2^2}, \quad \xi_{mw,i}^j = \frac{n_1 \xi_{L 1,i}^j - n_2 \xi_{L 2,i}^j}{n_1 - n_2} - \\ &- \frac{n_1 \xi_{\rho 1,i}^j + n_2 \xi_{\rho 2,i}^j}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

— ошибки определения ионо-

сферосвободных кодовых, фазовых и Мельбурна–Вуббена комбинаций; J_i — общее количество отслеживаемых НКА в i -й момент времени.

Используя (8) и (10), выражение для ионосферосвободной начальной фазы НАП ψ_{ifr} можно выразить через ψ_{01} и ψ_{mw} , что будет удобно использовать в дальнейших преобразованиях:

$$\begin{aligned} \psi_{ifr} &= n_1 \psi_{01} - n_2 \psi_{02} = \\ &= n_1 \psi_{01} - n_2 \psi_{01} + n_2 \psi_{mw} = \\ &= \Delta n \psi_{01} + n_2 \psi_{mw}. \end{aligned} \quad (12)$$

В основе моделей (7) лежит идея, в соответствии с которой смещения показаний часов НАП и j -го НКА разделяются на кодовые $dT_{\rho,ifr,i}^j$, $dt_{\rho,ifr,i}^j$, фазовые $dT_{L,ifr,i}^j$, $dt_{L,ifr,i}^j$ и смещения B_{mw} , $b_{mw,i}^j$ комбинации Мельбурна–Вуббена. Эта идея аналогична модели «разделенных» (*decoupled*) часов [8], используемой в GPS в работе [7], но отличается от нее составом слагаемых, входящих в оценки $dT_{\rho,ifr,i}^j$, $dt_{\rho,ifr,i}^j$, $dT_{L,ifr,i}^j$, $dt_{L,ifr,i}^j$ и B_{mw} .

Согласно [2, 6, 7], для уменьшения вероятности появления аномальных ошибок необходимо с учетом (11) преобразовать выражение (9) к виду $N_{ifr}^j = (n_1 - n_2) N 1^j + n_2 N_{mw}^j$. Подставляя это выражение в (7), получаем систему с вектором целочисленностей $\begin{bmatrix} N 1^j \\ N_{mw}^j \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \rho_{ifr,i}^j &= R_i^j + w_i^j \Delta D_i + dT_{\rho,ifr,i}^j - \\ &- b_{\text{ан},ifr}^j - dt_{\rho,ifr,i}^j + \xi_{\rho,ifr,i}^j, \\ L_{ifr,i}^j &= R_i^j + w_i^j \Delta D_i + dT_{L,ifr,i}^j - dt_{L,ifr,i}^j - \lambda_{ifr}^j \psi_{ifr} - \\ &- (n_1 - n_2) \lambda_{ifr}^j N 1^j - n_2 \lambda_{ifr}^j N_{mw}^j + \xi_{L,ifr,i}^j, \\ mw_i^j &= B_{mw} - (n_1 + n_2) \lambda_{ifr}^j \psi_{mw} - b_{NL}^j - b_{mw}^j - \\ &- (n_1 + n_2) \lambda_{ifr}^j N_{mw}^j + \xi_{mw,i}^j. \end{aligned} \quad (13)$$

В ГЛОНАСС, в отличие от GPS, кодовые аппаратурные задержки $b_{\text{ан}1}^j$, $b_{\text{ан}2}^j$ в общем случае различны для разных НКА j , а точнее, для разных литер lit^j , что не позволяет решить систему (13) даже при условии известных поправок к спутниковым часам $dt_{\rho,ifr,i}^j$, $dt_{L,ifr,i}^j$ и b_{mw}^j . Для преодоления этой проблемы предлагается использовать в сетевой задаче (определения поправок к спутниковым часам по измерениям сети наземных станций) и пользовательской задаче (определения координат НАП

потребителя с использованием поправок к спутниковым часам, полученных в результате решения сетевой задачи) измерения НАП от одного производителя и сделать предположение об одинаковости комбинаций аппаратурных задержек $b_{\text{ап},ifr}^j$ и b_{NL}^j для используемой НАП, хотя допустить их различие для разных $j = \overline{1, J_i}$. В таком случае можно считать, что из решения сетевой задачи известны спутниковые поправки $(b_{\text{ап},ifr}^j + dt_{\rho,ifr,i}^j)$ и $(b_{NL}^j + b_{mw}^j)$. Используя это допущение, рассмотрим решение пользовательской задачи.

Решение пользовательской задачи

Полагаем, пользовательская НАП идентична по характеристикам НАП, использованной для сетевого решения, в котором определены смещения показаний ионосферосвободных кодовых $(b_{\text{ап},ifr}^j + dt_{\rho,ifr,i}^j)$ и фазовых $dt_{L,ifr,i}^j$ часов, а также смещения $(b_{NL}^j + b_{mw}^j)$ Мельбуерна–Вуббена в аппаратуре j -го НКА. Тогда, с учетом (12), система нелинейных уравнений (13) для ионосферосвободных комбинаций может быть представлена в следующем линейаризованном виде:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{ifr,i}^j &= h_x^j\Delta x + h_y^j\Delta y + h_z^j\Delta z + \\ &+ w_i^j\Delta D_i + dT_{\rho,ifr,i} + \xi_{\rho,ifr,i}^j, \\ \Delta L_{ifr,i}^j &= h_x^j\Delta x + h_y^j\Delta y + h_z^j\Delta z + w_i^j\Delta D_i + \\ &+ dT_{L,ifr,i} - (n_1 - n_2)\lambda_{ifr}^j(N1^j + \psi_{01}) - \\ &- n_2\lambda_{ifr}^j(N_{mw}^j + \psi_{mw}) + \xi_{L,ifr,i}^j, \\ \Delta mw_i^j &= B_{mw} - (n_1 + n_2)\lambda_{ifr}^j(N_{mw}^j + \psi_{mw}) + \xi_{mw,i}^j, \\ &j = \overline{1, J_i}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta\rho_{ifr,i}^j = \rho_{ifr,i}^j - R_{c,i}^j + b_{\text{ап},ifr}^j + dt_{\rho,ifr,i}^j$, $\Delta L_{ifr,i}^j = L_{ifr,i}^j - R_{c,i}^j + dt_{L,ifr,i}^j$, $\Delta mw_i^j = mw_i^j + b_{NL}^j + b_{mw}^j$, — невязки ионосферосвободных комбинаций псевдодальностей $\rho_{ifr,i}^j$, псевдофаз $L_{ifr,i}^j$ и комбинации Мельбуерна–Вуббена mw_i^j ; $R_{c,i}^j$ — расстояние между точкой с грубыми координатами x_c, y_c, z_c НАП, относительно которой осуществляется линейаризация, на i -й момент времени и фазовым центром антенны j -го НКА; $\Delta x = x - x_c$, $\Delta y = y - y_c$, $\Delta z = z - z_c$ — поправки к грубым координатам x_c, y_c, z_c

НАП, относительно которых осуществляется линейаризация; $h_{x,i}^j = (x_c - x_i^j)/R_{c,i}^j$, $h_{y,i}^j = (y_c - y_i^j)/R_{c,i}^j$, $h_{z,i}^j = (z_c - z_i^j)/R_{c,i}^j$ — направляющие косинусы единичного вектора, ориентированного из точки фазового центра антенны j -го НКА в точку с грубыми координатами x_c, y_c, z_c НАП. Неизвестные, но постоянные начальные фазы ψ_{01} и ψ_{mw} намеренно объединены с целочисленными фазовыми неоднозначностями $N1^j$ и N_{mw}^j . Обозначим их как новые действительные переменные $\widetilde{N1}^j = N1^j + \psi_{01}$ и $\widetilde{N}_{mw}^j = N_{mw}^j + \psi_{mw}$ и заметим, что все целочисленные неоднозначности $N1^j$ и N_{mw}^j получили одинаковое действительное смещение ψ_{01} и ψ_{mw} соответственно. При этом неоднозначности потеряли свои целочисленные свойства. Однако, как будет видно в дальнейшем, это не мешает разрешать целочисленную неоднозначность псевдофазовых измерений, так как оцениваться в результате решения пользовательской задачи будут не сами величины $\widetilde{N1}^j$ и \widetilde{N}_{mw}^j , а их линейные комбинации. Эти линейные комбинации будем стараться задать таким образом, чтобы они приобрели целочисленные свойства (благодаря тому, что их действительное смещение одинаковое при выражении в циклах для всех неоднозначностей $N1^j$ и N_{mw}^j). Например, комбинации вида $\widetilde{N1}^j - \widetilde{N1}^r = N1^j - N1^r$ и $\widetilde{N}_{mw}^j - \widetilde{N}_{mw}^r = N_{mw}^j - N_{mw}^r$, $j = \overline{1, J_i}, j \neq r$, где r — номер некоторого спутника, находящегося в зоне видимости НАП, обладают целочисленным свойством. Используя информацию о целочисленности некоторых оцениваемых параметров, можно сократить время сходимости решения.

Система линейаризованных уравнений (14) может быть переписана в следующем матричном виде (далее все векторы и матрицы, в отличие от скаляров, будут выделяться полужирным шрифтом с указанием снизу их размерности и для уменьшения громоздкости нижний индекс «ifr» во всех обозначениях будет опущен):

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{\Xi}_i, \quad (15)$$

$3J_i \times 1 \quad 3J_i \times (7+2J_i) \quad (7+2J_i) \times 1 \quad 3J_i \times 1$

где

$$\mathbf{Y}_i = [\Delta\rho_i^1 \quad \dots \quad \Delta\rho_i^{J_i} \quad \Delta L_i^1 \quad \dots \quad \Delta L_i^{J_i} \quad \Delta mw_i^1 \quad \dots \quad \Delta mw_i^{J_i}]^T \quad (16)$$

— $3J_i \times 1$ — вектор невязок ионосферосвободных линейных комбинаций псевдодальностей, псевдофаз и комбинаций Мельбурна–Вуббена;

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z & \Delta D_i & dT_{\rho,ifr,i} & dT_{L,ifr,i} \\ (7+2J_i) \times 1 \end{bmatrix} B_{mw} \begin{bmatrix} \widetilde{N}1^1 & \dots & \widetilde{N}1^{J_i} & \widetilde{N}_{mw}^1 & \dots & \widetilde{N}_{mw}^{J_i} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

— $(7 + 2J_i) \times 1$ — вектор исходных переменных, множество всех возможных значений этого вектора образуют пространство исходных переменных $\mathcal{X}_i = \mathbb{R}^{7+2J_i} = \mathbb{R}^{n_{x,i}}$ размерности $n_{x,i} = (7+2J_i) \times (7+2J_i)$

$= 7 + 2J_i$ (далее везде в обозначении пространств первый подстрочный индекс будет указывать на размерность базисных векторов этого пространства, а второй — на размерность самого пространства);

$$\mathbf{\Xi}_i = [\xi_{\rho,i}^1 \dots \xi_{\rho,i}^{J_i} \xi_{L,i}^1 \xi_{L,i}^{J_i} \xi_{mw,i}^1 \dots \xi_{mw,i}^{J_i}]^T -$$

вектор ошибок определения ионосферосвободных комбинаций псевдодальностей $\xi_{\rho,i}^{j_i}$, псевдофаз $\xi_{L,i}^{j_i}$ и Мельбурна–Вуббена $\xi_{mw,i}^{j_i}$, выраженных в метрах. Ковариационная матрица \mathbf{R}_i вектора ошибок измерений $\mathbf{\Xi}_i$ должна обязательно учитываться в алгоритмах разрешения неоднозначности. Ее вид и алгоритм вычисления подробно описан в [7, 9] и отличается только величинами чисел n_1, n_2 , которые для ГЛОНАСС составляют 9 и 7 соответственно;

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ J_i \times 4 & J_i \times 1 & J_i \times 1 & J_i \times 1 & J_i \times J_i & J_i \times J_i \\ \mathbf{A}_i & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -(n_1 - n_2)\mathbf{\Lambda}_{ifr} & -n_2\mathbf{\Lambda}_{ifr} \\ J_i \times 4 & J_i \times 1 & J_i \times 1 & J_i \times 1 & J_i \times J_i & J_i \times J_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -(n_1 + n_2)\mathbf{\Lambda}_{ifr} \\ J_i \times 4 & J_i \times 1 & J_i \times 1 & J_i \times 1 & J_i \times J_i & J_i \times J_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

— матрица связи вектора наблюдений \mathbf{Y}_i (16) с вектором исходных переменных \mathbf{x}_i (17).

Блоки матрицы \mathbf{H}_i (18) имеют следующий смысл: \mathbf{A}_i является матрицей вида $\mathbf{A}_i =$

$\begin{bmatrix} h_{x,i}^1 & h_{y,i}^1 & h_{z,i}^1 & w_i^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{x,i}^{J_i} & h_{y,i}^{J_i} & h_{z,i}^{J_i} & w_i^{J_i} \end{bmatrix}$; блок $\mathbf{0}_{J_i \times 1}$ является вектор-столбцом из J_i нулей; блок $\mathbf{1}_{J_i \times 1}$ является вектор-столбцом из J_i единиц; блок $\mathbf{0}_{J_i \times J_i}$ является нулевой матрицей; блок $\mathbf{\Lambda}_{ifr}$ является диагональной $(J_i \times J_i)$ -матрицей вида

$$\mathbf{\Lambda}_{ifr} = \begin{bmatrix} \lambda_{ifr}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{ifr}^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{ifr}^{J_i} \end{bmatrix}.$$

Для матрицы \mathbf{H}_i (18) была найдена матрица \mathbf{K}_i , столбцы которой являются базисными векторами ее ядра (нуль-пространства) $\text{null}(\mathbf{H}_i) = R(\mathbf{K}_i) = \mathcal{K}_i$:

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 5 \times 1 & 5 \times 1 \\ (n_1 - n_2)\Delta\lambda_{ifr} & n_2\Delta\lambda_{ifr} \\ 0 & (n_1 + n_2)\Delta\lambda_{ifr} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ J_i \times 1 & J_i \times 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ J_i \times 1 & J_i \times 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $\mathbf{G} = [g^1 \dots g^{J_i}]^T = [2848 + lit^1 \dots 2848 + lit^{J_i}]^T$, $\Delta\lambda_{ifr} = \frac{n_1}{n_1^2 - n_2^2} \frac{c}{\Delta f_1}$. Под $\text{null}(\mathbf{B})$ понимается ядро (векторное нуль-пространство) произвольной матрицы \mathbf{B} . Под $R(\mathbf{B})$ понимается векторное пространство, образованное k m -мерными столбцами произвольной матрицы \mathbf{B} .

Следовательно, дефицит ранга матрицы \mathbf{H}_i (18) $dfh = \text{rank}(\mathbf{H}_i) - \text{rank}(\mathbf{K}_i) = 2$ и не зависит от числа видимых НКА J_i , а ранг матрицы \mathbf{H}_i (18) $rnkh = \text{rank}(\mathbf{H}_i) = n_{x,i} - 3J_i \times (7+2J_i) - dfh = (7 + 2J_i) - 2 = 5 + 2J_i$.

То есть система уравнений (15) является сингулярной — имеет бесконечное множество решений,

смещенных параллельно ядру \mathcal{K}_i . Из того, что первые пять элементов матрицы \mathbf{K}_i (19) равны нулю, следует, что ядро \mathcal{K}_i ортогонально тем осям системы координат, вдоль которых откладываются первые пять исходных переменных вектора \mathbf{x}_i (17), и, следовательно, первые пять переменных исходного вектора \mathbf{x}_i (17) бу-

дут одинаковыми для любого из бесконечного множества решений системы (15), то есть могут быть оценены однозначно (будем далее называть их однозначно или не смещенно оцениваемыми переменными, остальные переменные будем называть неоднозначно или смещенно оцениваемыми переменными). К первым пяти элементам вектора исходных переменных относятся поправки к грубым координатам НАП, нескомпенсированная составляющая влажной вертикальной тропосферной задержки и смещение кодовых часов приемника. Такие системы уравнений в работе [7] названы полусингулярными.

Оценка однозначно оцениваемых переменных полусингулярных систем может быть осуществлена с помощью теории S -преобразования [10–12]. При этом оценками неоднозначно оцениваемых параметров будут оценки линейных комбинаций элементов вектора исходных переменных \mathbf{x}_i (17).

Необходимо сформировать такие линейные комбинации параметров \widetilde{N}_1^j и \widetilde{N}_{mw}^j , которые сохраняют целочисленные свойства. Как показывает опыт решения задачи целочисленного ВАМО для ГНСС–КРК, привлечение в обработку информации о целочисленности этих комбинаций позволяет значительно сократить время сходимости решения.

Подробно процесс нахождения одного из бесконечного множества решений системы уравнений, подобной системе (15), с сохранением целочисленности оцениваемых неоднозначностей при помощи теории S -преобразования для случая ГНСС–КРК (в частности, GPS) был рассмотрено в работах [7, 9]. Однако случай ГНСС–ЧРК, который рассматривается в данной работе, имеет свои особенности. Используя обозначения, введенные в [7, 9], рассмотрим особенности, характерные для случая ГНСС–ЧРК.

Согласно теории S -преобразования для нахождения одного из бесконечного множества решений полусингулярной системы (15), пространство исходных переменных \mathcal{X}_i необходимо разбить на два непересекающихся подпространства: \mathcal{K}_i (оно однозначно определяется моделью измерений (14) или матрицей \mathbf{H}_i (18) и аналитиче-

ским выражением столбцов матрицы базисных векторов \mathbf{K}_i (19) этого пространства) и так называемое S -пространство $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{X}_i$, которое необходимо задать. Так как пространства \mathcal{K}_i и \mathcal{S}_i не пересекаются, $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{K}_i = \emptyset$, то прямая сумма этих пространств есть пространство исходных переменных $\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{K}_i = \mathcal{X}_i$. Существует бесконечное множество воз-

можных S -пространств \mathcal{S}_i , удовлетворяющих условию $\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{K}_i = \mathcal{X}_i$. Выбор единственного S -пространства из бесконечного множества будет описан ниже. Так как по условию $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{K}_i = \emptyset$, то, проектируя бесконечное множество решений системы уравнений (15) вдоль ядра \mathcal{K}_i на S -пространство \mathcal{S}_i , можно найти единственную проекцию бесконечного множества решений на выбранное S -пространство \mathcal{S}_i . Алгебраически ограничение множества решений только теми решениями, которые лежат в S -пространстве \mathcal{S}_i , можно выразить, добавив в исходную систему (15) уравнение (в общем случае — систему уравнений), задающее S -пространство:

$$\mathbf{0}_{dfh \times 1} = (\mathbf{S}_i^\perp)^T \mathbf{x}_i, \quad (20)$$

где \mathbf{S}_i^\perp — матрица базисных векторов S^\perp -пространства $\mathcal{S}_i^\perp = R \left(\mathbf{S}_i^\perp \right)$.

Пространство \mathcal{S}_i^\perp ортогонально S -пространству \mathcal{S}_i $nx_i \times dfh$

$\mathcal{S}_i^\perp \perp \mathcal{S}_i$ и также дополняет его до про-

странства исходных переменных $\mathcal{X}_i \oplus \mathcal{S}_i$ $nx_i \times rnk h$

$\oplus \mathcal{S}_i^\perp = \mathcal{X}_i$. Вектора матрицы \mathbf{S}_i^\perp $nx_i \times dfh$

ортогональны базисным векторам \mathbf{S}_i $nx_i \times rnk h$ S -про-

странства $\mathcal{S}_i = R \left(\begin{matrix} \mathbf{S}_i \\ \mathbf{S}_i^\perp \end{matrix} \right)$, поэтому

$$(\mathbf{S}_i^\perp)^T \mathbf{S}_i = \mathbf{0} \quad dfh \times n_{x,i} \times rnk h_i.$$

В итоге, дополняя полусингулярную систему (15) уравнениями S -пространства (20), получаем расширенную систему уравнений, которая при

соблюдении условия $\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{K}_i = \mathcal{X}_i$ $nx_i \times rnk h$ $nx_i \times dfh$ $nx_i \times n_{x,i}$ будет иметь полный ранг и, следовательно, единственное решение и уже не будет сингулярной (полусингулярной):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i \\ (\mathbf{S}_i^\perp)^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Матрица проекции из пространства исходных переменных \mathcal{X}_i в S -пространство \mathcal{S}_i $nx_i \times n_{x,i}$ $nx_i \times rnk h$ определяется выражением [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \\ &= \mathbf{E} - \mathbf{K}_i \left((\mathbf{S}_i^\perp)^T \mathbf{K}_i \right)^{-1} (\mathbf{S}_i^\perp)^T. \end{aligned} \quad (22)$$

Вектор оцениваемых переменных (вектор единственного решения системы (21)) связан с вектором исходных переменных \mathbf{x}_i (17) следующим выражением:

$$\mathbf{x}_{s,i} = \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i, \quad (23)$$

где $\mathbf{x}_{s,i}$ — вектор оцениваемых переменных, а нижний символ s означает проекцию на S -пространство. Оцениваемые переменные пред-

ставляют собой линейные комбинации исходных переменных, определяемые матрицей проекции \mathbf{P}_i (22), которая зависит от выбранного

S -пространства \mathcal{S}_i $nx_i \times rnk h$.

Выбор S -пространства

Рассмотрим выбор единственного S -пространства из бесконечного множества возможных при решении пользовательской задачи. Как было сказано выше, необходимо, чтобы выполнялось условие

$\mathcal{S}_i \cap \mathcal{K}_i = \emptyset$ или $\mathcal{S}_i \oplus \mathcal{K}_i = \mathcal{X}_i$ $nx_i \times rnk h$ $nx_i \times 2$ $nx_i \times rnk h$ $nx_i \times dfh$ $nx_i \times n_{x,i}$.

Из опыта обработки псевдофазовых измерений при целочисленном ВАМО по сигналам ГНСС-КРК известно [7, 9], что такими свойствами обладает S -пространство, заданное матрицей \mathbf{S}_i^\perp вида:

$$\mathbf{S}_i^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 5 \times 1 & 5 \times 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^r & \mathbf{0} \\ J_i \times 1 & J_i \times 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}^r \\ J_i \times 1 & J_i \times 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где $\mathbf{1}^r$ — вектор, состоящий из нулей и единственной единицы, стоящей на r -м месте. Матрица \mathbf{S}_i^\perp в виде (24) состоит из нулей, а единицы

в каждом столбце соответствуют неоднозначностям $\tilde{N}1^r$, \tilde{N}_{mw}^r r -го спутника, который будем называть опорным.

Проверим, будет ли матрица \mathbf{S}_i^\perp в виде (24) $nx_i \times dfh$

обеспечивать формирование таких линейных комбинаций неоднозначностей $N1^j$ и N_{mw}^j , при котором они сохраняют целочисленные свойства.

Для этого найдем аналитическое выражение вектора оцениваемых переменных $\mathbf{x}_{s,i}$ (23) при $nx_i \times 1$

помощи матрицы проекции \mathbf{P}_i (22):

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{s,i} = \\ n_{x,i} \times 1 \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta D_i \\ dT_{\rho,ifr,i} \\ dT_{L,ifr,i} - \frac{(n_1 - n_2)\Delta\lambda_{ifr}}{g^r} \widetilde{N1}^r - \frac{n_2\Delta\lambda_{ifr}}{g^r} \widetilde{N}_{mw}^r \\ B_{mw} - \frac{(n_1 + n_2)\Delta\lambda_{ifr}}{g^r} \widetilde{N}_{mw}^r \\ \widetilde{N1}^j - \frac{g^j}{g^r} \widetilde{N1}^r, \quad j = \overline{1, J} \\ \widetilde{N}_{mw}^j - \frac{g^j}{g^r} \widetilde{N}_{mw}^r, \quad j = \overline{1, J} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Рассмотрим подробнее аналитические выражения оцениваемых неоднозначностей в векторе $\mathbf{x}_{s,i}$ (25):

$$\begin{aligned} \widetilde{N1}^j - \frac{g^j}{g^r} \widetilde{N1}^r &= (N1^j + \psi_{01}) - \frac{g^j}{g^r} (N1^r + \psi_{01}) \\ &= N1^j - \frac{g^j}{g^r} N1^r + \psi_{01} \left(1 - \frac{g^j}{g^r} \right), \\ \widetilde{N}_{mw}^j - \frac{g^j}{g^r} \widetilde{N}_{mw}^r &= (N_{mw}^j + \psi_{mw}) - \frac{g^j}{g^r} (N_{mw}^r + \psi_{mw}) = \\ &= N_{mw}^j - \frac{g^j}{g^r} N_{mw}^r + \psi_{mw} \left(1 - \frac{g^j}{g^r} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Оцениваемые комбинации $\widetilde{N1}^j - \frac{g^j}{g^r} \widetilde{N1}^r$ и $\widetilde{N}_{mw}^j - \frac{g^j}{g^r} \widetilde{N}_{mw}^r$, строго говоря, не обладают целочисленностью, о чем свидетельствует выражение (26). Отличие от целых определяется слагаемыми $\psi_{01}(1 - \frac{g^j}{g^r})$, $\psi_{mw}(1 - \frac{g^j}{g^r})$ и $\frac{g^j}{g^r} N1^r$, $\frac{g^j}{g^r} N_{mw}^r$. Оценим эти величины.

В наихудшем случае, когда $\psi_{01} = \psi_{mw} = 0,5$ цикла, а $\frac{g^j}{g^r} = \frac{2854}{2841}$ (наибольшее отличие

от единицы), величины $\psi_{01}(1 - \frac{g^j}{g^r}) = \psi_{mw}(1 - \frac{g^j}{g^r}) \approx \approx 0,002$ цикла, поэтому ими можно пренебречь.

Величины $\frac{g^j}{g^r} N1^r$ и $\frac{g^j}{g^r} N_{mw}^r$ зависят от исходных неоднозначностей $N1^r$ и N_{mw}^r опорного спутника, и, так как в общем случае они могут быть произвольными целыми числами, отличие этих слагаемых от целых может быть существенно. Однако, как правило, в НАП минимизируется неопределенное целое число фазовых циклов посредством добавления к псевдофазовым измерениям такого целого числа длин волн, которое приближало бы величину псевдофазовых измерений к величине соответствующих кодовых измерений («притягивание» псевдофазовых измерений к кодовым, *phase-code alignment*). Даже если в НАП этой операции не выполняется, всегда есть возможность выполнить ее при обработке измерений. Это целое число длин волн должно поддерживаться постоянным во время слежения за сигналом спутника. Если задаться максимальным значением для величин неоднозначностей опорного спутника при выполнении такого «притягивания» $(N1^r)_{\max} = (N_{mw}^r)_{\max} = 20$, то можно вычислить отличие величин $\frac{g^j}{g^r} N1^r$ и $\frac{g^j}{g^r} N_{mw}^r$ от целых чисел. Снова выбирая наихудшее в смысле отличия от единицы отношение $\frac{g^j}{g^r} = \frac{2854}{2841}$, получаем оценку $\frac{g^j}{g^r} (N1^r)_{\max} = \frac{g^j}{g^r} (N_{mw}^r)_{\max} \approx 20,09$. То есть отличие от целого числа не превышает 0,1 цикла. Таким образом, этим отличием можно пренебречь, при условии, что выполняется «притягивание» фазовых измерений к кодовым и неизвестная величина исходной фазовой неоднозначности не превышает 20 циклов.

Таким образом, при выполнении найденного условия можно считать, что матрица \mathbf{S}_i^{\perp} $n_{x,i} \times dfh$ в виде (24) обеспечивает целочисленность оцениваемых фазовых неоднозначностей в векторе оцениваемых переменных $\mathbf{x}_{s,i}$ (25). Далее информацию о целочисленности фазовых неоднозначностей можно использовать для получения высокоточного целочисленного решения. Дальнейший алгоритм обработки измерений не отличается от алгоритма для ГНСС-КРК, описанного в [7].

Примеры обработки реальных измерений

По реальным измерениям была решена пользовательская задача с использованием сетевых поправок, вычисленных по сети из 6 наземных станций. В качестве НАП потребителя использовались измерения НАП, не участвовавшие в сетевом решении. Для решения пользовательской и сетевой задач использовались одинаковые модели НАП от одного производителя. Использовались быстрые (*rapid*) поправки к орбитам от службы IGS для спутников GPS и от ИАЦ КВНО «ЦНИИмаш» для спутников ГЛОНАСС и вычисленные по сети станций разделенные поправки к спутниковым часам ($b_{ap,ifr}^j + dt_{p,ifr,i}^j$), $dt_{L,ifr,i}^j$ и ($b_{NL}^j + b_{mw}^j$) (13).

Были получены 3 независимых решения пользовательской задачи: для созвездия ГЛОНАСС, GPS и при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS, результаты представлены на рисунке. При совместном использовании ГЛОНАСС и GPS смещения часов приемника относительно шкалы времени системы ГЛОНАСС и GPS оценивались как независимые переменные, однако некомпенсированная часть вертикальной тропосферной задержки и поправки к координатам НАП не зависят от используемой ГНСС, поэтому были общими переменными для уравнений измерений ГЛОНАСС и GPS. Это приводит к повышению избыточности системы уравнений и объясняет значительное уменьшение времени сходимости и увеличение точности совместного решения по ГЛОНАСС и GPS в отличие от использования систем по отдельности.

На 40-й минуте обработки процесс сходимости намеренно был начат сначала для демонстрации оперативности сходимости целочисленного решения к сантиметровому уровню точности.

Синяя кривая на рисунке представляет собой действительное решение, полученное по модели измерений (14) для целочисленного ВАМО до разрешения целочисленных фазовых неоднозначностей. Красная кривая соответствует целочисленному решению (после разрешения неоднозначностей). Разрешение неоднозначностей проводилось независимо на каждую эпоху, поэтому возможно появление аномальных ошибок (неправильного разрешения). Например, для решения по ГЛОНАСС после

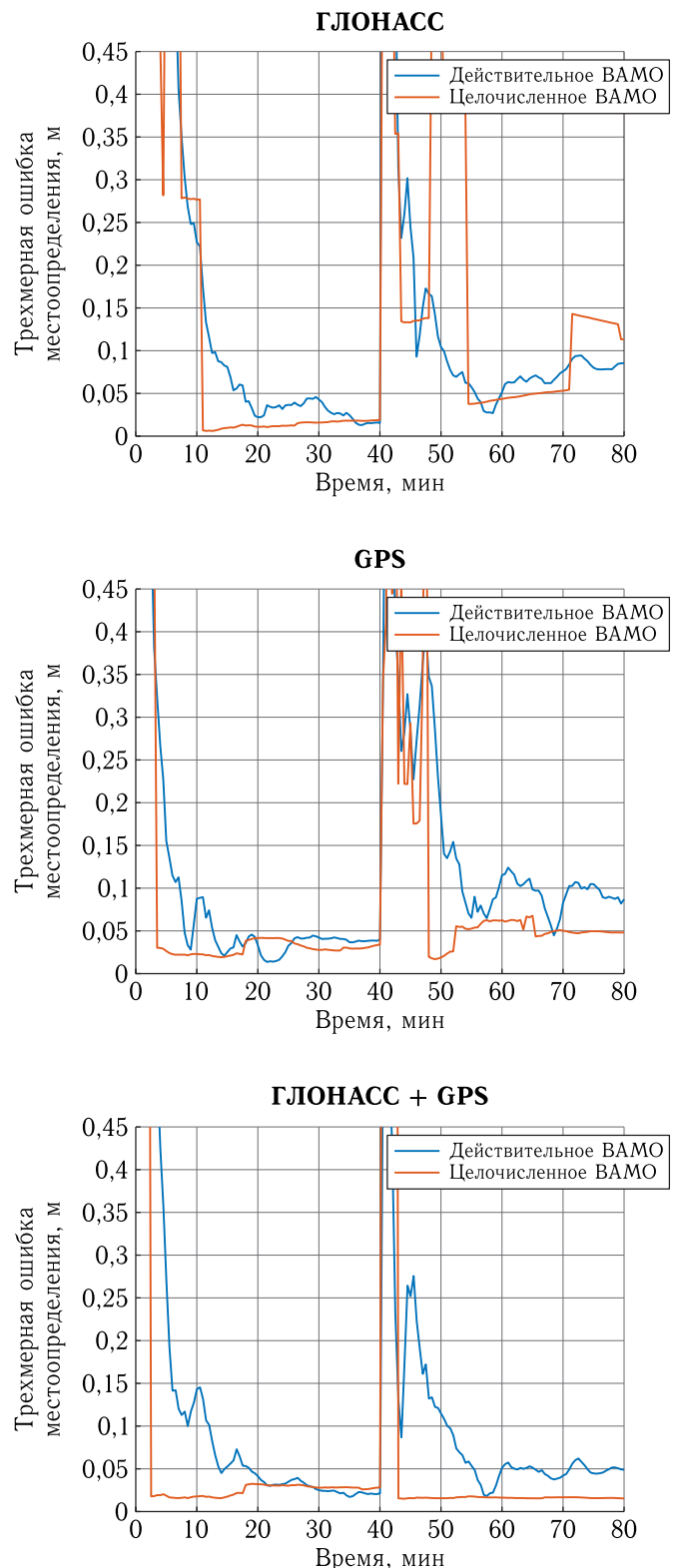


Рисунок. Зависимость трехмерной ошибки местоопределения от времени при целочисленном ВАМО по сигналам ГЛОНАСС, GPS и совместном использовании ГЛОНАСС и GPS

70-й минуты обработки в целочисленном решении оценки координат потребителя возникает резкий скачок, в результате которого целочисленное решение оказывается хуже, чем действительное. Это явление — результат неправильного разрешения целочисленной неоднозначности. На графике для решения по совместному созвездию GPS и ГЛОНАСС видно, что аномальные ошибки отсутствуют — на всем интервале обработки (в том числе после 70-й минуты) скачков в оценке положения потребителя нет. Таким образом, совместное использование GPS и ГЛОНАСС позволяет снизить вероятность появления аномальных ошибок, что иллюстрирует рисунок.

Действительное решение (синяя кривая на рисунке) достигает сантиметровой точности в лучшем случае приблизительно через 20 минут обработки. Привлечение в обработку информации о целочисленности неоднозначностей псевдофазовых измерений (красная кривая на рисунке) позволяет снизить время сходимости до сантиметрового уровня точности до 2,5 минут (в 8 раз). Снижение времени сходимости целочисленного решения, по сравнению с действительным, характерно как для отдельного использования GPS и ГЛОНАСС, так и для совместного.

Заключение

Рассмотрены алгебраические основы решения пользовательской задачи при ВАМО с разрешением неоднозначности псевдофазовых измерений по сигналам ГЛОНАСС с ЧРК.

Продемонстрирована возможность использования системы ГЛОНАСС для целочисленного ВАМО как независимо от GPS, так и совместно. Показано уменьшение времени сходимости при разрешении неоднозначности псевдофазовых измерений для решения по сигналам ГЛОНАСС.

Продемонстрировано значительное (в 8 раз) уменьшение времени сходимости до сантиметрового уровня точности и увеличение надежности решения (уменьшение вероятности появления аномальных ошибок) при совместном использовании ГЛОНАСС и GPS.

Полученный результат свидетельствует о справедливости сделанных гипотез о линейности фазо-

частотной характеристики и о близости величин кодовых аппаратных задержек для одинаковых моделей НАП от одного производителя, а кроме того, о допустимости нестрогого сохранения целочисленности оцениваемых неоднозначностей псевдофазовых измерений ГЛОНАСС.

Сравнение решений при отдельном использовании ГЛОНАСС и GPS показывает, что для ГЛОНАСС время сходимости больше, чем для GPS. Это можно объяснить тем, что при построении математических моделей измерений ГЛОНАСС был сделан ряд допущений и гипотез, а также тем, что группировка ГЛОНАСС включает меньшее число спутников (24 в отличие от 32 в GPS). Кроме того, не все из этих 24 спутников излучают сигнал на двух частотах, что является необходимым условием образования ионосферосвободных комбинаций измерений.

Список литературы

1. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Навигационный радиосигнал в диапазонах L1, L2 (редакция 5.1), Москва, 2008.
2. *Поваляев А. А.* Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат. М.: Радиотехника 2008. 328 с.
3. *Wanninger L.* Carrier-phase inter-frequency biases of GLONASS receivers // *Journal of Geodesy*, 2012, vol. 86, № 2. P. 139–148. DOI: 10.1007/s00190-011-0502-y
4. *Sleewaegen J.-M., Simsky A., De Wild W., Boon F., Willems T.* Digital vs analog. Demystifying GLONASS inter-frequency Carrier Phase Biases // *Inside GNSS*, 2012, vol. 7 (3). P. 57–61.
5. *Kouba J.* A guide to using International GNSS Service (IGS) products. 2009.
6. *Teunissen P.J.G.* The invertible GPS ambiguity transformations // *Manuscripta Geodaetica*, 1995, vol. 20. P. 489–497.
7. *Поваляев А. А., Подкорытов А. Н., Никитин С. А., Филимонова Д. В.* Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов // *Ракетно-космическое*

- приборостроение и информационные системы, 2019, т. 6, вып. 1. С. 3–16.
8. *Collins P.* Isolating and Estimating Undifferenced GPS Integer Ambiguities. Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation, San Diego, California, January 28–30, 2008. P. 720–732.
 9. *Поваляев А. А., Бабурин А. А., Подкорытов А. Н.* Применение теории решетчатых упаковок в задаче высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям параметров сигналов ГНСС с кодовым разделением // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2021, т. 8, вып. 2. С. 51–61.
 10. *de Jonge P. J.* A processing Strategy for the Application of the GPS in Networks. Publications on Geodesy 46. Delft, August 1998.
 11. *Teunissen P. J. G.* Generalized Inverses, Adjustment the Datum Problem and S-transformations. Preprint. Delft University of Technology. Reports of the Department of Geodesy Mathematical and Physical Geodesy, 1984. 47 с.
 12. *Подкорытов А. Н.* Высокоточное местоопределение в глобальных навигационных спутниковых системах в абсолютном режиме за счет разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений. Дисс... ..канд. техн. наук. М., 2014. 195 с.