

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИМИ АППАРАТАМИ,  
ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И СИСТЕМЫ ТЕЛЕМЕТРИИ.  
ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ ЗЕМЛИ

УДК 623.54 DOI 10.30894/issn2409-0239.2022.9.2.27.35

**Модель эталонных значений коэффициента  
динамической связи параметров движения  
баллистического объекта**

**А. А. Кобзарь**, *д. т. н.*, [kobzar.alexant@yandex.ru](mailto:kobzar.alexant@yandex.ru)

*4-й Государственный центральный межвидовой полигон МО РФ (полигон Капустин Яр),  
г. Знаменск, Астраханская область, Российская Федерация*

**Г. И. Ребриков**, *к. т. н.*, [rgeiv2159@yandex.ru](mailto:rgeiv2159@yandex.ru)

*4-й Государственный центральный межвидовой полигон МО РФ (полигон Капустин Яр),  
г. Знаменск, Астраханская область, Российская Федерация*

**А. С. Устинов**, [andrustinoff@gmail.com](mailto:andrustinoff@gmail.com)

*4-й Государственный центральный межвидовой полигон МО РФ (полигон Капустин Яр),  
г. Знаменск, Астраханская область, Российская Федерация*

**Аннотация.** В статье рассматривается математическое обоснование и исследование свойств выявленной новой физической закономерности — компактного поведения реализаций коэффициента динамической связи в виде отношения модуля вектора скорости к модулю продольной перегрузки. В разных летных экспериментах, отличающихся объектами испытаний, условиями входа в атмосферу и другими условиями проведения эксперимента коэффициенты динамической связи ведут себя однообразно и образуют компактное множество реализаций. В ходе исследований предложена и обоснована математическая модель закономерности, сделаны рекомендации по ее использованию при анализе результатов летных экспериментов.

**Ключевые слова:** головная часть ракеты, баллистический коэффициент, коэффициент динамической связи, условия входа в атмосферу

**Model of Reference Values of Dynamical Relation Coefficient  
of Ballistic Object Motion Parameters**

**A. A. Kobzar**, *Dr. Sci. (Engineering)*, [kobzar.alexant@yandex.ru](mailto:kobzar.alexant@yandex.ru)

*The 4<sup>th</sup> State Central Interspecific Range of the Ministry of Defense of the Russian Federation (Kapustin Yar Range),  
Astrakhan region, Znamensk, Russian Federation*

**G. I. Rebrikov**, *Cand. Sci. (Engineering)*, [rgeiv2159@yandex.ru](mailto:rgeiv2159@yandex.ru)

*The 4<sup>th</sup> State Central Interspecific Range of the Ministry of Defense of the Russian Federation (Kapustin Yar Range),  
Astrakhan region, Znamensk, Russian Federation*

**A. S. Ustinov**, [andrustinoff@gmail.com](mailto:andrustinoff@gmail.com)

*The 4<sup>th</sup> State Central Interspecific Range of the Ministry of Defense of the Russian Federation (Kapustin Yar Range),  
Astrakhan region, Znamensk, Russian Federation*

**Abstract.** The paper deals with the mathematical justification and study of a new physical regularity — compact behavior of dynamical relation coefficient realizations as ratio of the of velocity vector module to the longitudinal overload module. The coefficients of dynamical relations express themselves in a similar way and give a compact set of realizations that differ in testing objects, entry conditions into atmosphere, and other experiment conditions during different flight experiments. It has given and proved the mathematical regularity model. The article gives valuable recommendations in model using for analysis of flight test experiments.

**Keywords:** missile head, ballistic coefficient, dynamical relation coefficient, entry conditions into atmosphere

Для анализа результатов летных экспериментов применяются различные методы, которые основаны на определении и анализе каждого в отдельности параметра баллистического объекта. Предлагаемый авторами метод предполагает анализ и оценку не по отдельности каждого параметра динамической системы, а с учетом физических связей пары параметров друг с другом. В работе [1, с. 359] предложен метод динамических связей применительно к параметрам головных частей ракет как баллистических объектов. В качестве количественной характеристики динамической связи для скорости и перегрузки головной части предложен коэффициент динамической связи (далее КДС):

$$q_{VN_x} = \frac{V/V_{\text{ср}}}{N_x/N_{x\text{ср}}}, \quad (1)$$

где  $V$  и  $V_{\text{ср}}$  — значение и среднее значение скорости;  $N_x$  и  $N_{x\text{ср}}$  — значение и среднее значение продольной перегрузки.

Этот коэффициент оказывается в некоторых случаях весьма полезным и способен дать дополнительную информацию о свойствах объекта.

В ходе обработки данных ряда экспериментов получен набор значений КДС для разных условий полета. Графики реализаций КДС приведены на рис. 1. Из графиков видно, что они располо-

жены весьма компактно около некоторого среднего в определенном коридоре значений, что говорит о статистическом постоянстве множества реализаций КДС. При этом все они получены для разных головных частей, скоростей входа в атмосферу, углов входа, условий атмосферы и других условий испытательного пуска. Этот факт подтверждает наличие сильной физической связи мгновенной скорости и продольной перегрузки, которую можно проследить в уравнениях, описывающих движение баллистического объекта на основе физических законов.

Для движущегося без возмущений тела ускорение равно производной от скорости. Однако в реальных экспериментах на тело воздействует целый ряд возмущений, имеющих стохастический характер: изменение угла атаки, обгар поверхности, нестабильность атмосферы, ветер и др. В этих условиях получение перегрузки дифференцированием приводит к недопустимым погрешностям. Интегрирование полной системы уравнений динамики баллистического объекта требует большого объема исходных данных и не может быть выполнено при сбоях или отсутствии некоторых параметров. Авторами предлагается соотношение скорости и перегрузки в реальных условиях эксперимента выражать значением КДС.

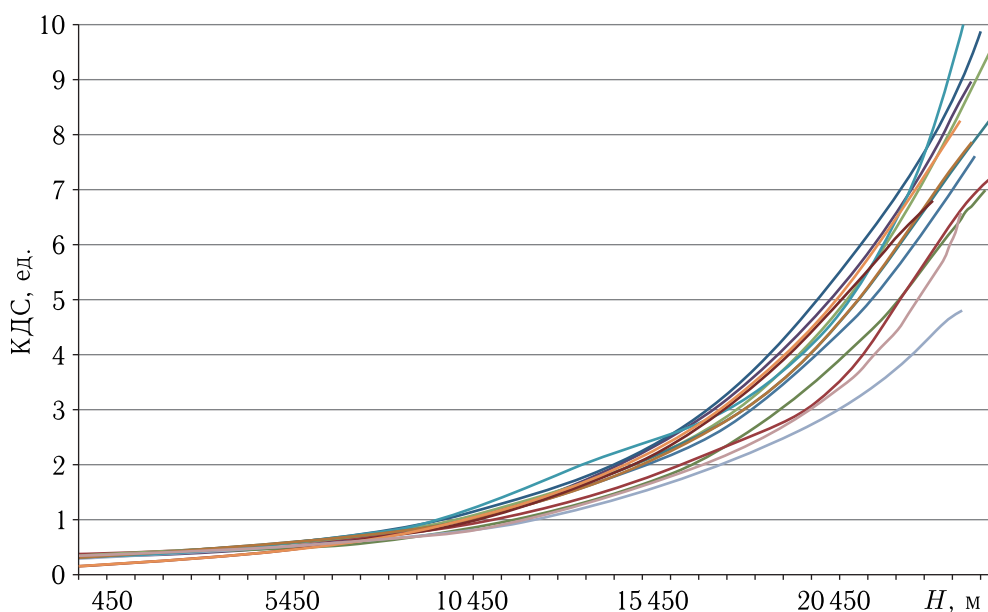


Рис. 1. Набор реализаций КДС в зависимости от высоты для разных условий летного эксперимента

Для математического описания физических закономерностей поведения КДС определимого зависимость от параметров полета головной части в атмосфере синтезируем модель закономерности. Для этого используем уравнения движения неуправляемой головной части в атмосфере [2, с. 140; 3, с. 96]. При переходе к высоте полета в качестве независимой переменной система уравнений динамики объекта принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dh} &= -\frac{c_x \cdot S_m}{m} \cdot \frac{q}{V \cdot \sin(\Theta)} - \frac{g(r)}{V}, \\ \frac{d\Theta}{dh} &= \left[ \frac{1}{R_3 + h} - \frac{g(r)}{V^2} \right] \cdot \text{ctg}(\Theta), \\ \frac{dt}{dh} &= \frac{1}{V \cdot \sin(\Theta)}, \\ \frac{d\eta}{h} &= \frac{1}{R_3 + h} \cdot \text{ctg}(\Theta), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $V$  — скорость, м/с;  $h$  — высота над поверхностью Земли, м;  $c_x$  — коэффициент силы лобового сопротивления;  $S_m$  — площадь сечения Миделя, м<sup>2</sup>;  $m$  — масса тела, кг;  $q$  — скоростной напор, кг/(м · с<sup>2</sup>);  $\Theta$  — угол наклона траектории, рад;  $g(r)$  — ускорение силы тяжести, м/с<sup>2</sup>;  $R_3$  — радиус Земли, м;  $\eta$  — угол вектора положения объекта в плоскости стрельбы, рад.

Для упрощения системы с целью получения интегрируемого вида уравнений принят ряд допущений [3, с. 102].

1. На высотах ниже 40 км ускорение, обусловленное аэродинамическим сопротивлением, многократно превышает гравитационное ускорение. На этом основании вторым слагаемым в первом уравнении можно пренебречь. Тогда первое уравнение системы примет вид:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{c_x \cdot S_m}{m} \cdot \frac{q}{V \cdot \sin(\Theta)}.$$

2. Производная угла наклона траектории  $\frac{d\Theta}{dh}$  не превосходит на всем участке величины 0,00005 1/м, что позволяет считать  $\Theta = \Theta_{\text{вх}} = \text{const}$ .

3. Принимается допущение об изотермичности атмосферы, т. е. изменение плотности, подчиняется экспоненциальному закону:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\beta h},$$

где  $\rho_0$  — плотность воздуха у поверхности Земли, кг/м<sup>3</sup>;  $\beta = 1,39 \cdot 10^{-4}$  — логарифмический градиент плотности атмосферы, 1/м.

4. На рассматриваемом участке спуска баллистический коэффициент считается постоянным:

$$\sigma = \frac{C_x S_m}{m} = \text{const}.$$

С учетом перечисленных допущений интегрирование системы уравнений (2) приводит к следующим выражениям:

• для скорости

$$V = V_{\text{вх}} \cdot e^{-k \cdot \rho}, \quad (3)$$

где  $V_{\text{вх}}$  — скорость входа в атмосферу,  $k = \frac{\sigma}{2 \cdot \beta \cdot |\sin(\Theta)|}$ ;

• для перегрузки

$$|N_x| = \frac{\sigma}{2 \cdot g_0} \cdot \rho \cdot V^2, \quad (4)$$

где  $g_0$  — ускорение силы тяжести у поверхности Земли, м/с<sup>2</sup>;  $\sigma$  — баллистический коэффициент, м<sup>2</sup>/кг.

В соответствии с полученными аналитическими зависимостями (3) и (4) по определению (1) формула КДС скорости и продольной перегрузки имеет вид:

$$q_{VN_x} = \frac{2 \cdot g_0}{\sigma \rho V_{\text{вх}}} \cdot e^{\frac{\sigma \rho}{2 \cdot \beta \cdot |\sin(\Theta)|}} \cdot \frac{N_{\text{хср}}}{V_{\text{ср}}}, \quad (5)$$

где  $N_{\text{хср}}$  — средняя перегрузка на участке движения, ед.;  $V_{\text{ср}}$  — средняя скорость на участке движения, м/с.

Таким образом, получена математическая модель как функция параметров движения баллистического объекта, которая позволяет определить ряд новых свойств КДС и использовать их при проведении анализа результатов летных испытаний.

Моделирование КДС по формуле (5) приводит к построению набора графиков для разных головных частей и их условий входа в атмосферу (рис. 2).

На графике рис. 2 показаны: кривые 1 и 2 — для разных углов входа ( $\Theta_{\text{вх}2} > \Theta_{\text{вх}1}$ ), кривые 3 и 4 для разных скоростей входа. Кривые 3 и 4 практически совпадают, хотя из формулы (5) следует, они должны отличаться. Независимость от скорости обусловлена тем, что величина  $N_x$  зависит

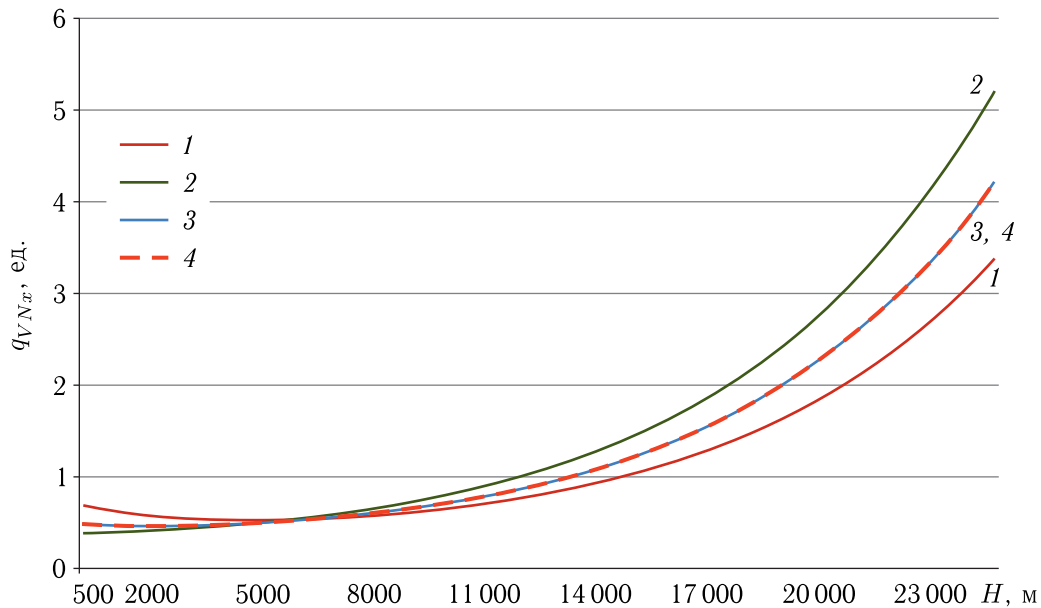


Рис. 2. Модель КДС для различных условий входа головных частей в атмосферу

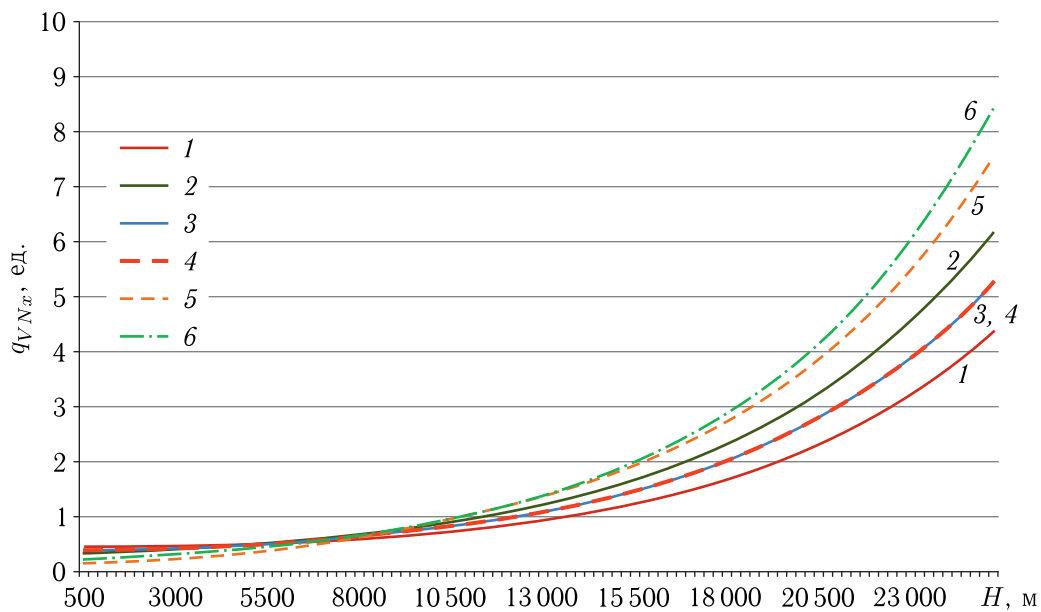


Рис. 3. Модели коэффициента динамической связи с переменным баллистическим коэффициентом

от  $V^2$  по формуле (4), вследствие чего нормировочная величина  $N_{xcp}$  в числителе зависит от  $V^2$ , что компенсирует влияние  $V_{вх}$  и  $V_{ср}$  в знаменателе формулы (5).

На рис. 2 видно, что в области малых высот (высота менее 7000 м) значения модели КДС увеличиваются с приближением высоты к нулю, чего нет у практических данных рис. 1. Это обуслов-

лено принятым ограничением  $\sigma = const$ . На практике баллистический коэффициент в конце полета в плотных слоях атмосферы увеличивается. Если смоделировать его увеличение на малых высотах в виде плавной функции, то получится результат, приведенный на рис. 3.

На рис. 3 кривые 5 и 6 соответствуют значениям баллистического коэффициента, монотонно

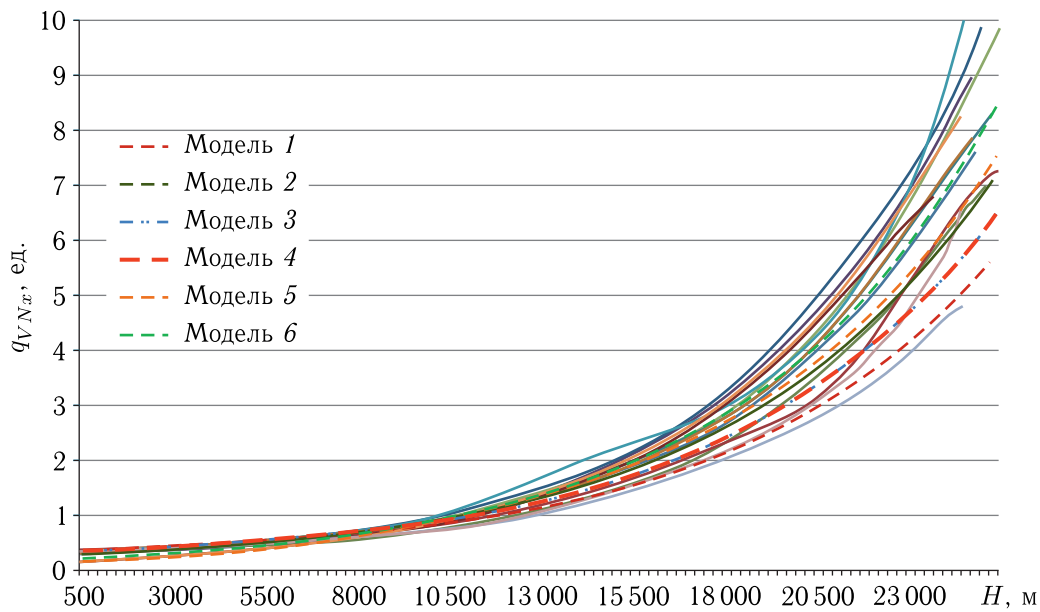


Рис. 4. График соответствия модели для 6 значений баллистического коэффициента и реальных данных

увеличивающегося на малых высотах, кривые 1–4 те же, что на рис. 2. Этот вариант модели лучше совпадает с практическими данными. Это означает, что ограничение № 4 — постоянство баллистического коэффициента — снимается. Его изменение моделируется монотонной зависимостью, которая априорно вычисляется из предыдущих экспериментов для аналогичных объектов и условий входа в атмосферу. В описанных экспериментах использовалась линейная или экспоненциальная зависимости баллистического коэффициента от высоты.

Совмещение практических и модельных значений КДС изображено на рис. 4. На графике штриховыми линиями обозначены модельные данные для разных баллистических коэффициентов, сплошными — экспериментальные. Из графика рис. 4 видно, что модель адекватно описывает реальные данные. Использование переменного баллистического коэффициента привело к более точному соответствию модели статистическим данным.

Среднее по множеству, взятое для всей совокупности КДС или для отдельной группы КДС, может быть взято за эталон и описано с помощью модели (5). С помощью модели эталонных значений схожих по условиям экспериментов можно сравнивать отдельные реализации КДС или восстанавливать один из сбойных параметров полета —

скорости по перегрузке или перегрузки по скорости с помощью формулы (1).

Для более наглядного сопоставления модели и экспериментальных данных представим совместные графики модели и группы экспериментальных кривых КДС, относящихся к одному объекту испытаний с одинаковыми условиями входа в атмосферу (рис. 5). Для модели взяты характеристики реализации № 4: скорость и угол входа, баллистический коэффициент. В качестве параметров атмосферы взята стандартная атмосфера по ГОСТ 4401-81.

Из графика видно, что модель проходит внутри пучка реализаций № 1–6 и описывает поведение реализации № 4 и группы кривых. Параметры модели соответствуют параметрам группы по скорости, углу входа в атмосферу, а величина баллистического коэффициента определена для реализации № 4 по формуле, выведенной из формулы (4):

$$\sigma = \frac{2 \cdot g_0 \cdot |N_x|}{\rho \cdot V^2}. \tag{6}$$

Небольшое отклонение модели от практических данных естественным образом демонстрирует случайные вариации баллистического коэффициента, обусловленные ориентацией головной части и изменением параметров атмосферы, а также неточностью модели, связанные с принятыми допущениями.

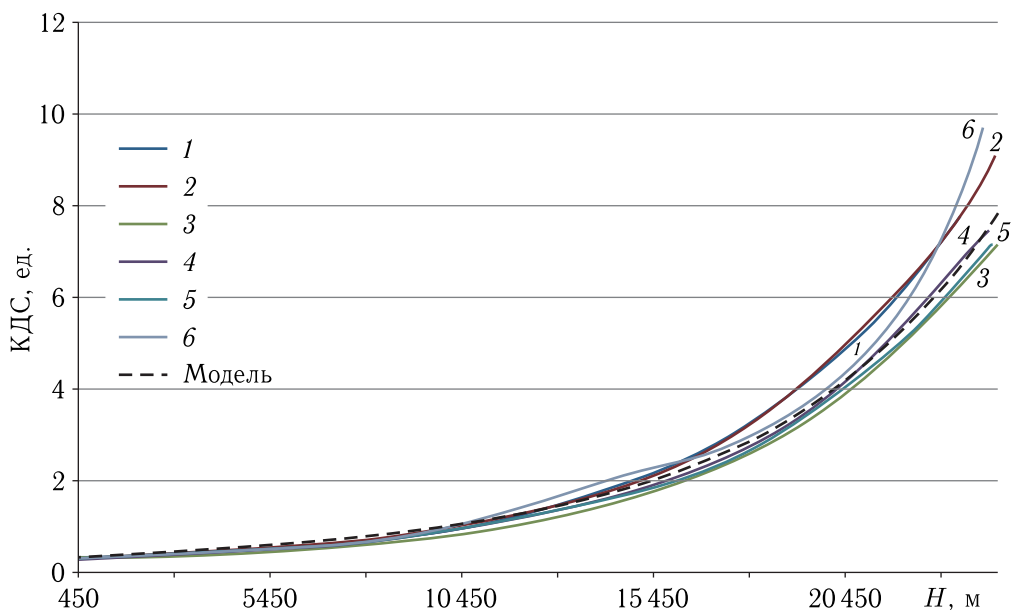


Рис. 5. Совместный график модели (штриховая линия) и группы КДС для разных экспериментов, относящихся к одному объекту испытаний (линии 1–6)

Из графика видно, что модель близка к реализации КДС № 4. Так как все реализации относятся к одинаковым значениям скорости и угла входа, то смещение модельной кривой вверх-вниз может быть проведено незначительным изменением баллистического коэффициента в пределах 10–15%. В данном случае баллистический коэффициент является единственным параметром, изменение которого позволяет совместить модель с конкретной реализацией КДС. Это следует из формулы (5), так как параметры скорости входа и угла входа одинаковы для всей группы экспериментов.

Из этого следует, что характер поведения КДС является индикатором величины баллистического коэффициента. Чем выше проходит кривая КДС, тем меньше баллистический коэффициент, тем с меньшим сопротивлением проходит головная часть атмосферный участок.

Приведенная на рис. 5 модель построена по исходным данным графика КДС № 4. Реализация № 5 имеет параметры, близкие к параметрам реализации № 4. Для более подробного исследования модели рассмотрим эти две кривые и их модели на отдельном графике на рис. 6.

Из рис. 6 видно, что модели и реальные данные расположены достаточно близко. Модель и ре-

ализация № 4 имеют предельное отклонение в 10%. У модели КДС № 4 с реализацией № 5 предельное отклонение составляет 12%. Модель и реализация КДС № 5 имеют предельное отклонение 6%. Приведенные предельные отклонения могут служить оценкой точности модели. Это означает, что модель достаточно точно описывает реальные данные и может служить инструментом изучения свойств и особенностей головных частей.

Вариацией величины баллистического коэффициента можно совместить модель с любой из реализаций КДС (см. рис. 4, рис. 5) и таким образом оценить его значение и изменение с высотой.

При исследовании модели и реальных данных выявлены некоторые общие закономерности зависимости формы кривой КДС от параметров входа в атмосферу:

1) на высотах менее 10 000 м ход кривых КДС практически не зависит от параметров входа в атмосферу и баллистического коэффициента;

2) наклон кривой КДС на высотах более 10 000 м зависит от угла входа в атмосферу;

3) наклон кривой КДС на высотах более 10 000 м не зависит от скорости входа в атмосферу (кривые 3 и 4 рис. 3 совпадают);



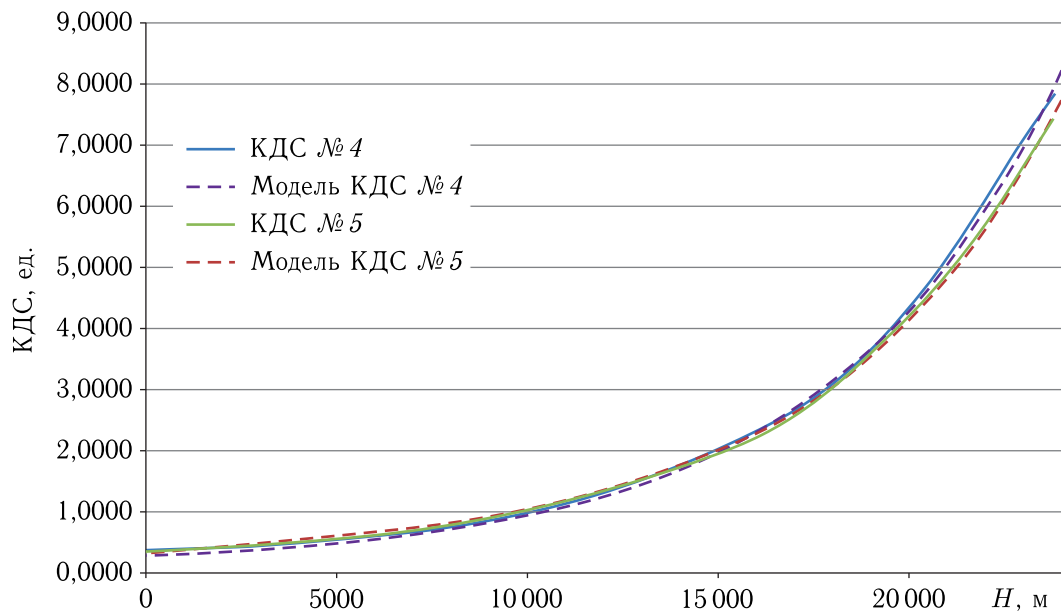


Рис. 6. Соответствие реализаций КДС и их моделей для экспериментов №4 и №5

4) по внешнему виду кривой КДС можно судить об угле входа в атмосферу и его изменении в процессе спуска;

5) наклон кривой КДС при равных условиях пуска — скорости и угле входа — зависит от баллистического коэффициента, по характеру прохождения кривой КДС (выше–ниже) можно судить о степени торможения и величине баллистического коэффициента, а также его изменении в процессе спуска;

6) подбором значений баллистического коэффициента можно точно совместить модель КДС и его реализацию, что позволяет определить реальное значение баллистического коэффициента в виде монотонной функции от высоты;

7) хотя при выводе формулы (5) принято допущение о постоянстве баллистического коэффициента, построение графиков с учетом его изменения приводит к лучшему соответствию модели и реальных КДС, исчезает подъем кривой в области малых высот, отмеченный на рис. 2;

8) кривые КДС для головных частей разного веса и конструкции, разных углов и скоростей входа в атмосферу лежат достаточно близко друг к другу, а их графики и эталонные значения (средние по множеству) могут применяться для сравнительного анализа группы пусков одной головной части с разными условиями либо для сравне-

ния свойств разных головных частей в разных или сходных условиях;

9) при частичных потерях информации о скорости и перегрузке с помощью среднестатистического КДС группы аналогичных экспериментов можно провести количественную оценку недостающего параметра (скорости или перегрузки) по формуле (1).

Приведем пример применения КДС к анализу результатов летных испытаний (рис. 7).

На приведенном рисунке видно сильное отличие поведения реализации №7а от других реализаций с аналогичными условиями входа. При этом расчетный баллистический коэффициент варианта 7а такой же, как у вариантов 1–6. При рассмотрении графиков скоростей и перегрузок по отдельности явных отличий реализации 7а от других не видно, так как скорости входа в атмосферу и перегрузки аналогичны. В этом случае КДС проявляет свои свойства, наглядно выявляя особенности конкретной реализации испытаний.

Так почему же график рис. 7 демонстрирует такое сильное отличие реализации 7а? Ответ находится определением баллистического коэффициента по формуле (6). Оказывается, что на высотах более 12 км он вдвое меньше, чем у аналогичных реализаций. Можем предположить, что головная часть с такими же массогабаритными характеристиками,

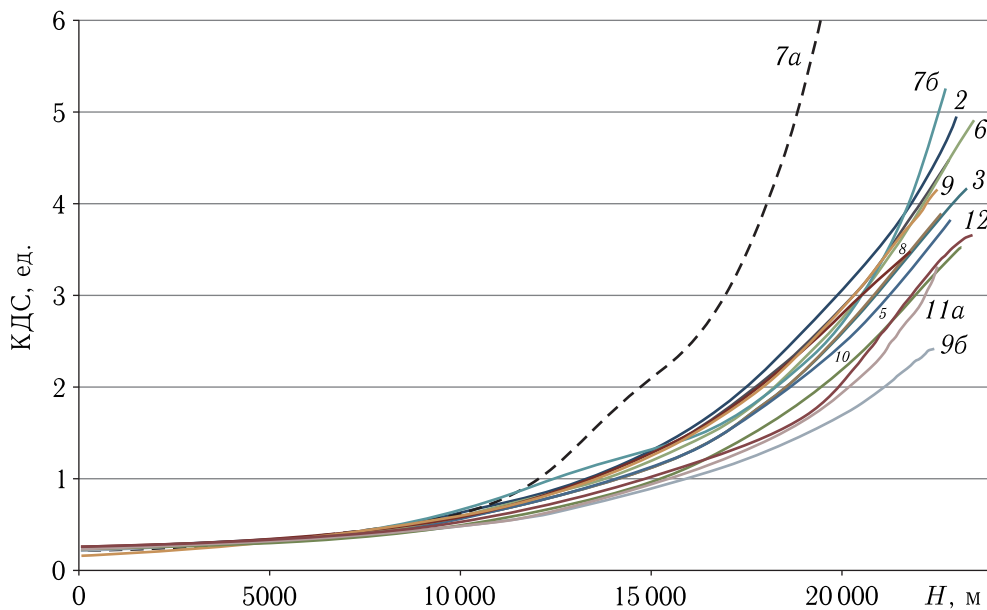


Рис. 7. Коэффициенты динамической связи группы испытаний (кривые 1–12) разных головных частей при разных условиях входа в атмосферу

как и другие, вошла в атмосферу с углом атаки, близким к нулю. Остальные головные части вошли в атмосферу с разными, но значительно большими углами, которые к высоте 12 000 м вышли на балансировочные углы, близкие к нулю; таким образом, их КДС сравнялись с вариантом 7a.

В результате применения знаний о КДС мы получили сведения об особенностях испытаний № 7a, уточнили баллистический коэффициент, выявили отличия группы испытаний и получили сравнительную информацию о свойствах этой группы.

Проведенные исследования показывают, что выявленная закономерность поведения КДС оказывается весьма полезной в связи с наличием в практических экспериментах неопределенности исходных данных, полученных результатов измерений и других условий проведения летного эксперимента. Неопределенность обусловлена сложным характером расчетной модели движения динамического объекта, отличием его реальных характеристик от расчетных, случайностью начальных условий входа в атмосферу, неопределенностью атмосферы, реально реализовавшимися в пуске [4, с. 14]. В этих условиях КДС дает дополнительную информацию о функционировании головной части на атмосферном участке.

## Выводы

В статье описана новая физическая закономерность, заключающаяся в том, что в разных летных экспериментах, отличающихся объектами испытаний, условиями входа в атмосферу и другими условиями проведения эксперимента, коэффициенты динамической связи ведут себя однообразно и образуют компактное множество реализаций. Использование новой физической закономерности как источника дополнительной информации дает возможность проводить более углубленный и качественный анализ и оценку летно-технических характеристик испытываемых головных частей ракет и процессов функционирования объектов испытаний в целом.

Приведено описание математической модели коэффициента динамической связи, разработанной авторами. Исследованы особенности зависимости коэффициентов динамической связи от параметров входа в атмосферу. В результате проведенного сравнительного анализа доказана ее адекватность реальным данным, что позволяет в дальнейшем определить ряд новых свойств КДС и использовать их при проведении анализа результатов летных испытаний.

Разработанная математическая модель КДС может быть использована для качественного



и количественного анализ результатов экспериментов, проведенных в разных условиях, для обобщения результатов серии экспериментов, для восстановления недостающих данных в случае потери измерительной информации по одному из параметров движения и в других случаях, что определяет перспективность данного направления.

## Список литературы

1. Тюлин А.Е., Бетанов В.В., Кобзарь А.А. Навигационно-баллистическое обеспечение полета ракетно-космических средств. Методы, модели и алгоритмы оценивания параметров движения. В 2 кн. Книга 1. Монография. М.: Радиотехника, 2018. 480 с.
2. Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф. Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970. 244 с.
3. Андреев А.Н., Байрамов К.Р., Войтенко С.И., Донченко А.А. Баллистика ракет: учебник в 2 ч. Часть II. М.: Военная академия РВСН имени Петра Великого, 2015. 499 с.
4. Кислов О.В., Литвинов С.П., Кобзарь А.А., Соколов С.П. Требования к перспективной автоматизированной системе анализа результатов летных испытаний средств боевого оснащения // Вестник воздушно-космической обороны, 2018, № 4 (20).