

УДК 629.78 DOI 10.30894/issn2409-0239.2021.8.3.48.62

**Применение теории решетчатых упаковок
в задаче определения временных корректирующих поправок
для высокоточного абсолютного местоопределения
по ионосферосвободным измерениям в ГНСС
с кодовым разделением**

А. А. Поваляев, *д. т. н.*, rovalyaev_aa@spacecorp.ru

*АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
профессор ФГБОУ «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»,
Москва, Российская Федерация*

А. А. Бабури*н*, contact@spacecorp.ru

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

А. Н. Подкорытов, *к. т. н.*, contact@spacecorp.ru

*АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
доцент ФГБОУ «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»,
Москва, Российская Федерация*

Аннотация. Рассматривается использование теории решетчатых упаковок в сетевой задаче определения временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по измерениям псевдодальностей и псевдофаз, осуществляемых сетью наземных станций по сигналам ГНСС с кодовым разделением. Рассматриваются преимущества решения этой задачи на основе теории решетчатых упаковок по сравнению с известным из литературы ее решением на основе алгебраической теории графов. Решение сетевой задачи на основе алгебраической теории графов было рассмотрено в ранее опубликованной работе авторов [3].

Корректирующие поправки доставляются в навигационную аппаратуру потребителя по каналам связи и используются в ней для решения пользовательской задачи определения координат потребителя с ошибками, обычно не превышающими 1–3 см. Определение высокоточных корректирующих поправок в работе осуществляется с разрешением неоднозначности целочисленностей псевдофазовых измерений, что приводит к резкому сокращению времени, необходимого для достижения сантиметровой точности местоопределения в пользовательской задаче.

Ключевые слова: спутниковая навигация, навигационный космический аппарат (НКА), высокоточные абсолютные местоопределения (ВАМО), измерения псевдодальностей и псевдофаз по сигналам НКА с кодовым разделением, разрешение целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений, действительное и целочисленное ВАМО

Using of Lattice Packing Theory for Determination of Clock Corrections for Precise Point Positioning Based on CDMA GNSS Signals

A. A. Povalyaev, *Dr. Sci. (Engineering)*, povalyaev_aa@spacecorp.ru
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation

Professor of Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russian Federation

A. A. Baburin, contact@spacecorp.ru

Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation

A. N. Podkorytov, *Cand. Sci. (Engineering)*, contact@spacecorp.ru
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation

Associate Professor of Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russian Federation

Abstract. Using of lattice packing theory for computation of precise satellite clock corrections based on measurements from a ground network of GNSS CDMA signals (network solution) is considered. Advantage of lattice packing theory for this task solution in comparison with algebraic graph theory is described. Network solution based on of algebraic graph theory was considered in previous paper of the authors [3].

The precise satellite clock corrections are transmitted into the user receiver and applied to get the user coordinates with the errors usually not exceeding 1–3 cm. Ambiguity resolution of carrier phase measurements is used to get such precise satellite clock corrections; it leads to a considerable increase in positioning accuracy and a significant reduction of convergence time for user solution.

Keywords: satellite navigation, navigation spacecraft (S/C), ionosphere-free combinations, precise point positioning (PPP), ambiguity resolution (AR) of phase measurements, integer lattice datum, matrix of unimodular transformation

Введение

Определение спутниковых корректирующих поправок по измерениям сети наземных станций для высокоточного абсолютного местоопределения (ВАМО) осуществляется в сетевой задаче. Временные и эфемеридные корректирующие поправки по линиям связи сообщаются потребителю. Потребитель применяет эти поправки при обработке осуществляемых им измерений псевдодальностей и псевдофаз в пользовательской задаче [1, 2] — задаче определения координат потребителя с ошибками 1–3 см.

В сетевой задаче так же, как и в пользовательской, основной проблемой обработки измерений является преодоление недостатка ранга системы линейных уравнений, получаемых путем линеаризации нелинейных математических моделей измерений псевдодальностей и псевдофаз, осуществляемых сетью наземных станций, с сохранением целочисленности псевдофазовых неоднозначностей. Сохранение этой целочисленности позволяет разрешать ее неоднозначность, что приводит к резкому сокращению времени, необходимого для достижения сантиметровой точности местоопределения в пользовательской задаче.

В предыдущей работе авторов [3] при описании решения сетевой задачи ВАМО по ионосферосвободным измерениям параметров сигналов ГНСС с кодовым разделением каналов (ГНСС-КРК) на основе алгебраической теории графов (АТГ)

использовались ключевые утверждения, без их обоснования. В данной статье на основе применение теории решетчатых упаковок (ТРУ) проводится обоснование этих ключевых положений.

С целью сокращения объема статьи исходные математические обозначения заимствуются в статье из [2, 3] и помечаются звездочкой. Для определения смыслового содержания этих заимствованных обозначений читателю рекомендуется обратиться к работам [2, 3].

Линеаризованные математические модели ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз в сетевой задаче целочисленного ВАМО в ГНСС с кодовым разделением каналов

В описании решения сетевой задачи в [3] используются следующие обозначения: J_i — количество НКА в ГНСС-КРК, одновременно видимых всей сетью наземных станций в i -й момент времени; M_i — количество станций наземной сети в i -й момент времени; $J_{m,i}$ — количество НКА, видимых m -й станцией наземной сети $m = \overline{1, M_i}$ в i -й момент времени. В таблице, заимствованный из [3], представлен пример видимости НКА GPS станциями наземной сети.

Таблица. Видимость НКА станциями сети. 1 — НКА виден, 0 — НКА не виден

	m	Номера НКА системы GPS, видимые всей сетью наземных станций												$J_{m,i}$
		1	2	3	10	16	17	21	22	23	26	27	31	
		Номера НКА в порядке расположения их в едином массиве												
Станции наземной сети	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	5
	2	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	5
	3	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	5
	4	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	3
	5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	4
	6	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	7
	7	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3

Видимым НКА в таблице соответствуют единицы, невидимым нули. Для сценария, представленного в таблице, которая в [3] названа матрицей сценария, в i -й момент времени $M_i = 7$, $J_i = 12$, $J_{m,i}$ — равно количеству единиц в строках матрицы сценария, т. е. количеству НКА, видимых каждой m -й станцией наземной сети в i -й момент времени. $J_{\Sigma,i} = \sum_{m=1}^{M_i} J_{m,i}$ (для сценария, представленного в таблице, $J_{\Sigma,i} = 32$).

Для дальнейшего рассмотрения необходимо ввести понятие особых случаев матриц сценария. В число таковых входят: матрица сценария, в которой некоторая m -я станция сети видит только один НКА и этот НКА виден только m -станцией; матрица сценария, в которой некоторая m -я станция сети видит $J_{m,i}$ ($J_{m,i} > 1$) НКА, при этом $J_{m,i} - 1$ этих НКА видит только эта же станция. Особые случаи матриц сценария на практике появляются редко и могут возникать в локальных сетях.

Сетевая задача для особых случаев матриц сценария не может быть решена. Вывод таких матриц из числа особых осуществляется путем отбрасывания из них строки, содержащей измерения m -й станции. Далее рассмотрение проводится только для матриц сценария, не входящих в число особых случаев.

В компактном матричном виде, заимствованном из [3], система линеаризованных уравнений для ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз в сетевой задаче имеет вид (все вектора и матрицы в отличие от скаляров выделены полужирным шрифтом с указанием снизу их размерности)

$$\mathbf{Y}_{3J_{\Sigma,i} \times 1}^* = \mathbf{H}_{3J_{\Sigma,i} \times nx_i}^* \cdot \mathbf{x}_{nx_i \times 1}^* + \mathbf{\Xi}_{3J_{\Sigma,i} \times 1}^*, \quad (1)$$

где $\mathbf{Y}_{3J_{\Sigma,i} \times 1}^*$ — вектор невязок ионосферосвободных измерений псевдодальностей, псевдофаз и комбинаций Мельбуерна–Вубена; $\mathbf{x}_{nx_i \times 1}^*$ — вектор исходных переменных сетевой задачи размерности $nx_i = 4M_i + 3J_i + 2J_{\Sigma,i}$; $\mathbf{H}_{3J_{\Sigma,i} \times nx_i}^*$ — матрица связи вектора $\mathbf{x}_{nx_i \times 1}^*$ с вектором $\mathbf{Y}_{3J_{\Sigma,i} \times 1}^*$. Множество всех

возможных значений вектора $\mathbf{x}_{nx_i \times 1}^*$ образуют пространство исходных переменных \mathcal{X}_i размерности nx_i (далее везде в обозначении пространств первый подстрочный индекс будет указывать на размерность базисных векторов этого пространства, а второй — на размерность самого пространства).

Целью решения сетевой задачи является определение по измерениям, осуществляемым в i -й момент времени всеми M_i станциями наземной сети, векторов смещений показаний ионосферосвободных кодовых $dt_{1 \times J_i}^*$, и фазовых $dt_{1 \times J_{ik}}^*$ часов, а также ионосферосвободных комбинаций Мельбуерна–Вубена $\mathbf{b}_{1 \times J_i}^{mw,i}$ в аппаратуре всех видимых сетью J_i НКА, входящих в состав вектора исходных переменных $\mathbf{x}_{nx_i \times 1}^*$. При этом координаты станций и координаты всех J_i НКА, по которым проводятся измерения, предполагаются известными с высокой точностью.

Для матрицы связи $\mathbf{H}_{3J_{\Sigma,i} \times nx_i}^*$, соответствующей матрице сценария, не входящей в число особых случаев, была найдена матрица $\mathbf{K}_{nx_i \times dfh_i}^{net,i}$, столбцы которой являются линейно независимыми базисными векторами ее ядра (нуль-пространства). Для ее представления необходимо ввести в рассмотрение следующие вспомогательные матричные блоки:

$$\mathbf{K}_{(4M_i+3J_i) \times 3}^{11,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* \\ \mathbf{1}_{M_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* \\ \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* & \mathbf{1}_{M_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* \\ \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{M_i \times 1}^* & \mathbf{1}_{M_i \times 1}^* \\ \mathbf{1}_{J_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{J_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{J_i \times 1}^* \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1}^* & \mathbf{1}_{J_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{J_i \times 1}^* \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1}^* & \mathbf{0}_{J_i \times 1}^* & \mathbf{1}_{J_i \times 1}^* \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{12.i}^{full} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}^*_{M_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{M_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{M_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{M_i \times J_i} \\ \lambda_{\Delta nifr}^* \mathbf{E}_{M_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{M_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{M_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{M_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{J_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{J_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{J_i \times M_i} & -\lambda_{\Delta nifr}^* \mathbf{E}_{J_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{J_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{J_i \times J_i} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_{13.i}^{full} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}^*_{M_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{M_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{M_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{M_i \times J_i} \\ \lambda_{n_2ifr}^* \mathbf{E}_{M_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{M_i \times J_i} \\ \lambda_{mw}^* \mathbf{E}_{M_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{M_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{J_i \times M_i} & \mathbf{0}^*_{J_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{J_i \times M_i} & -\lambda_{n_2ifr}^* \mathbf{E}_{J_i \times J_i} \\ \mathbf{0}^*_{J_i \times M_i} & -\lambda_{mw}^* \mathbf{E}_{J_i \times J_i} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_{22.i}^{full} &= \mathbf{K}_{33.i}^{full} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^*_{J_{\Sigma.i} \times M_i} & \mathbf{U}^*_{J_{\Sigma.i} \times J_i} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{E}_{M_i \times M_i}$, $\mathbf{E}_{J_i \times J_i}$ — единичные матрицы. С учетом обозначений (2) матрица базисных векторов ядра $\mathbf{K}_{net.i}$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{net.i} &= \\
&= \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{KR}_i}_{n_{x_i} \times 3} & \underbrace{\mathbf{KN1}_i}_{n_{x_i} \times (M_i + J_i - 1)} & \underbrace{\mathbf{KNmw}_i}_{n_{x_i} \times (M_i + J_i - 1)} \\ \underbrace{\mathbf{K}_{11.i}}_{(4M_i + 3J_i) \times 3} & \underbrace{\mathbf{K}_{12.i}}_{(4M_i + 3J_i) \times (M_i + J_i - 1)} & \underbrace{\mathbf{K}_{13.i}}_{(4M_i + 3J_i) \times (M_i + J_i - 1)} \\ \mathbf{0}^*_{J_{\Sigma.i} \times 3} & \mathbf{K}_{22.i}_{J_{\Sigma.i} \times (M_i + J_i - 1)} & \mathbf{0}^*_{J_{\Sigma.i} \times (M_i + J_i - 1)} \\ \mathbf{0}^*_{J_{\Sigma.i} \times 3} & \mathbf{0}^*_{J_{\Sigma.i} \times (M_i + J_i - 1)} & \mathbf{K}_{33.i}_{J_{\Sigma.i} \times (M_i + J_i - 1)} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{K}_{12.i}$, $\mathbf{K}_{22.i} = \mathbf{K}_{33.i}$, $(4M_i + 3J_i) \times (M_i + J_i - 1)$, $J_{\Sigma.i} \times (M_i + J_i - 1)$, $J_{\Sigma.i} \times (M_i + J_i - 1)$ — матричные блоки, получаемые путем вычеркивания произвольного k -го столбца из соответствующих матричных блоков $\mathbf{K}_{12.i}^{full}$, $\mathbf{K}_{22.i}^{full} = \mathbf{K}_{33.i}^{full}$, $(4M_i + 3J_i) \times (M_i + J_i)$, $J_{\Sigma.i} \times (M_i + J_i)$, $J_{\Sigma.i} \times (M_i + J_i)$, $\mathbf{K}_{13.i}$, входящих в (2); \mathbf{KR}_i — подматрица, образуемая первыми тремя столбцами матрицы ядра $\mathbf{K}_{net.i}$ (3); $\mathbf{KN1}_i$ — подматрица, образуемая $M_i + J_i - 1$ столбцами матрицы ядра $\mathbf{K}_{net.i}$ (3) с номерами $n_{x_i} \times (2M_i + 2J_i + 1)$ $n_{x_i} \times (M_i + J_i - 1)$ $4 \div (M_i + J_i + 2)$; \mathbf{KNmw}_i — подматрица, образуемая последними $M_i + J_i - 1$ столбцами матрицы ядра $\mathbf{K}_{net.i}$ (3).

Количество столбцов в матрице $\mathbf{K}_{net.i}$ (3) равно $2M_i + 2J_i + 1$ и по этому недостаток ранга матрицы связи $\mathbf{H}_{net.i}^*$ $3J_{\Sigma.i} \times n_{x_i}$ равен $dfh_i = 2M_i + 2J_i + 1$, а ее ранг $rnkh_i = n_{x_i} - dfh_i = 2M_i + J_i + 2J_{\Sigma.i} - 1$.

Как видно из (2), (3), первые M_i элементов всех вектор-столбцов матрицы базисных векторов ядра $\mathbf{K}_{net.i}$ (3) равны нулю. Это означает, что пространство множества решений системы (1) ортогонально тем осям системы координат пространства \mathcal{X}_i , вдоль которых откладываются первые M_i элементов вектора исходных переменных $\mathbf{x}_{net.i}^*$, образующие вектор $\Delta \mathbf{D}_i^*$ не скомпенсированных частей вертикальных тропосферных задержек $\Delta D_{m.i}^*$ $m.i = \overline{1, M_i}$ (м) в точках расположения НАП M_i станций наземной сети. Поэтому первые M_i координат точек, лежащих в dfh_i -мерном пространстве решений, остаются неизменными при изменении остальных $n_{x_i} - M_i$ координат этих точек. Следовательно, вектор $\Delta \mathbf{D}_i^*$ может быть оценен без смещения. Остальные векторы $d\mathbf{T}_{\rho.i}^*$, $d\mathbf{T}_{L.i}^*$, $\mathbf{B}_{mw.i}^*$, $dt_{\rho.i}^*$, $dt_{L.i}^*$, $b_{mw.i}^*$, $\mathbf{N1}_i^*$, \mathbf{Nmw}_i^* , входящие

в вектор исходных переменных $\mathbf{x}_{net.i}^*$, являются смещенно оцениваемыми (со-векторами), т. е. могут быть оценены только в составе некоторых линейных комбинаций. Видим, что к числу со-векторов относятся и векторы $\mathbf{dt}_{\rho,i}^*$, $\mathbf{dt}_{L,i}^*$, $\mathbf{b}_{mw,i}^*$, оценки которых являются целью решения сетевой задачи.

Решение сетевой задачи

Определение линейных комбинаций, образуемых со-векторами, как и в пользовательской задаче, осуществляется на основе теории S -преобразования [4], т. е. проецированием вдоль ядра, задаваемого матрицей $\mathbf{K}_{net.i}$ (3), всех точек пространства \mathcal{X}_i на линейное S -пространство, являющееся дополнением к ядру матрицы связи $\mathbf{H}_{net.i}^*$. Отсюда следует, что размерность S -пространства, т. е. число его базисных векторов, должно быть равно рангу $rnkh_i$ матрицы связи $\mathbf{H}_{net.i}^*$ системы линейных уравнений (1) и прямая сумма \oplus ядра, имеющего размерность dfh_i , и S -пространства образуют пространство \mathcal{X}_i размерности $nx_i = rnkh_i + dfh_i$.

Вектор координат точек проекций пространства \mathcal{X}_i на S -пространство образует вектор новых переменных $\mathbf{x}_{net.s.i}$. Связь векторов $\mathbf{x}_{net.s.i}$ новых и $\mathbf{x}_{net.i}^*$ исходных переменных определяется выражением [4]

$$\mathbf{x}_{net.s.i} = \mathbf{P}_{net.i} \mathbf{x}_{net.i}^* \quad (4)$$

где

$$\mathbf{P}_{net.i} = \mathbf{E}_i - \mathbf{K}_{net.i} \left((\mathbf{S}_{net.i}^\perp)^T \mathbf{K}_{net.i} \right)^{-1} (\mathbf{S}_{net.i}^\perp)^T \quad (5)$$

— матрица проекции на S -пространство, \mathbf{E}_i — единичная матрица, $\mathbf{S}_{net.i}^\perp$ — матрица ран-

га dfh_i , вектор-столбцы которой ортогональны S -пространству, т. е. вектор-столбцы матрицы $\mathbf{S}_{net.i}^\perp$ являются базисом ортогонального дополнения к S -пространству. С помощью матрицы нормальное уравнение S -пространства записывается в виде

$$(\mathbf{S}_{net.i}^\perp)^T \mathbf{x}_{net.i}^* = \mathbf{0} \quad (6)$$

Первым вектором, входящим в состав вектора $\mathbf{x}_{net.s.i}$ (4) новых переменных, является оцениваемый без смещения M_i -вектор $\Delta \mathbf{D}_i^*$ рованных частей вертикальных тропосферных задержек. Остальными векторами, входящими в состав вектора $\mathbf{x}_{net.s.i}$ новых переменных, являются со-векторы, являющиеся линейными комбинациями векторов, входящих в состав вектора исходных переменных $\mathbf{x}_{net.i}^*$. Коэффициенты, с которыми исходные переменные входят в вектора линейных комбинаций, определяются элементами матрицы проекции $\mathbf{P}_{net.i}$ (5).

Ядро матрицы связи $\mathbf{H}_{net.i}^*$ исходной системы линейных уравнений (1) по определению является ортогональным дополнением пространства вектор-строк этой матрицы. S -пространство должно быть дополнением к ядру матрицы связи $\mathbf{H}_{net.i}^*$. Пространство, задаваемое базисом, состоящим из вектор-столбцов матрицы $\mathbf{S}_{net.i}^\perp$, является ортогональным дополнением к S -пространству. Таким образом, вектор-столбцы матрицы $\mathbf{S}_{net.i}^\perp$ являются дополнением (не обязательно ортогональным) к вектор-столбцам матрицы связи $\mathbf{H}_{net.i}^*$ и, следовательно, матрицы $\left[\begin{matrix} \mathbf{H}_{net.i}^T & \mathbf{S}_{net.i}^\perp \\ nx_i \times 3J_{\Sigma,i} & nx_i \times dfh_i \end{matrix} \right]$, $\left[\begin{matrix} \mathbf{H}_{net.i} \\ 3J_{\Sigma,i} \times nx_i \\ (\mathbf{S}_{net.i}^\perp)^T \\ dfh_i \times nx_i \end{matrix} \right]$ будут иметь полный ранг равный nx_i . Тогда оценка $\hat{\mathbf{x}}_{net.s.i}$ вектора

новых переменных $\mathbf{x}_{net.s.i}$ (4) может быть найдена из решения расширенной системы линейных уравнений полного ранга, получаемой путем объединения систем (1) и (6):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_i \\ 3J_{\Sigma,i} \times 1 \\ \mathbf{0} \\ dfh_i \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{net.i} \\ 3J_{\Sigma,i} \times nx_i \\ (\mathbf{S}_{net.i}^\perp)^T \\ dfh_i \times nx_i \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_{net.s.i} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}_{net.i} \\ J_{\Sigma,i} \times 1 \\ \mathbf{0} \\ dfh_i \times 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Единственное решение системы (7) может быть получено при условии, что число строк $3J_{\Sigma,i} + dfh_i$ расширенной матрицы $\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{net.i}^T & (\mathbf{S}_{net.i}^\perp)^T \\ nx_i \times 3J_{\Sigma,i} & nx_i \times dfh_i \end{bmatrix}^T$ больше или равно размерности nx_i вектора новых переменных $\mathbf{x}_{net.s.i}$, т. е. должно выполняться условие $3J_{\Sigma,i} + dfh_i \geq nx_i = 4M_i + 3J_i + 2J_{\Sigma,i}$. Отсюда получаем следующее ограничение:

$$J_{\Sigma,i} \geq 2M_i + J_i - 1, \quad (8)$$

которое должно выполняться для получения единственного решения сетевой задачи.

Для того, чтобы в алгоритме решения системы (7) можно было использовать информацию о целочисленности части переменных, входящих в вектор новых переменных $\mathbf{x}_{net.s.i}$ (4), S -пространство должно задаваться не только как дополнение к ядру, но и так, чтобы целочисленные компоненты $\mathbf{N}\mathbf{1}_i$, $J_{\Sigma,i} \times 1$

$\mathbf{N}\mathbf{m}w_i$ вектора $\mathbf{x}_{net.i}^*$ исходных переменных при проектировании вдоль ядра на S -пространство переходили бы в целочисленные компоненты вектора новых переменных $\mathbf{x}_{net.s.i}$ (4). Для определения способа задания S -пространства, удовлетворяющего этому дополнительному требованию, необходимо рассмотреть особенности пространства \mathcal{X}_i , особенности ядра матрицы связи $\mathbf{H}_{net.i}^*$, а также ввести в рассмотрение понятия, которые потребуются в дальнейшем.

Пространство \mathcal{X}_i можно разбить на три ортогональных друг другу подпространства. Первое $(4M_i + J_i)$ — мерное подпространство $\mathcal{X}\mathcal{R}_i$, $nx_i \times (4M_i + 3J_i)$

задаваемое первыми $4M_i + 3J_i$ осями ортогональной системы координат, вдоль которых откладываются действительные переменные, являющиеся компонентами векторов $\Delta\mathbf{D}_i^*$, $d\mathbf{T}_{\rho,i}^*$, $d\mathbf{T}_{L,i}^*$, $\mathbf{B}_{mw,i}^*$, $dt_{\rho,i}^*$, $dt_{L,i}^*$, $\mathbf{b}_{mw,i}^*$, входящих в вектор $\mathbf{x}_{net.i}^*$ исходных переменных системы (1).

Второе $J_{\Sigma,i}$ -мерное подпространство $\mathcal{X}\mathcal{N}\mathbf{1}_i$, $nx_i \times J_{\Sigma,i}$ является дискретно-целочисленным. Оно задается предпоследними $J_{\Sigma,i}$ осями ортогональной системы координат, вдоль которых откладываются компоненты вектора произвольных целочисленностей $\mathbf{N}\mathbf{1}_i^*$. Это $J_{\Sigma,i}$ -мерное подпространство заполнено дискретными точками, образующими $J_{\Sigma,i}$ -мерную целочисленную решетку $\mathcal{X}\mathcal{N}\mathbf{1}_i$, $J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}$.

Координаты узлов этой решетки — целые числа, являющиеся компонентами вектора произвольных целочисленностей $\mathbf{N}\mathbf{1}_i^*$, $J_{\Sigma,i} \times 1$.

Третье подпространство $\mathcal{X}\mathcal{N}\mathbf{m}w_i$ также является дискретно-целочисленным и задается последними $J_{\Sigma,i}$ осями ортогональной системы координат, вдоль которых откладываются компоненты вектора произвольных целочисленностей $\mathbf{N}\mathbf{m}w_i^*$, $J_{\Sigma,i} \times 1$.

Третье подпространство также заполнено дискретными точками, образующими такую же $J_{\Sigma,i}$ -мерную целочисленную решетку $\mathcal{X}\mathcal{N}\mathbf{m}w_i$. Координаты узлов этой решетки — целые числа, являющиеся компонентами вектора произвольных целочисленностей $\mathbf{N}\mathbf{m}w_i^*$. Таким образом, пространство исходных переменных \mathcal{X}_i является «полудискретным» $nx_i \times nx_i$

в том смысле, что координаты его точек непрерывны по первым $(4M_i + 3J_i)$ и дискретно-целочисленны по последним $2J_{\Sigma,i}$ осям системы координат.

В ТРУ [5] целочисленные решетки (подрешетки) задаются их репером. Под репером целочисленной решетки (подрешетки) понимается базис этой решетки (подрешетки), элементы векторов которого являются взаимно простыми целыми числами. Периодическое смещение репера вдоль его векторов на величину длины этих векторов образует целочисленную решетку (подрешетку).

Вид матрицы ядра $\mathbf{K}_{net,i}^{net,i}$ (3) базисных векторов ядра показывает, что пространство ядра $\mathcal{K}_{net,i}^{net,i}$ можно разбить на три неортогональных и дополняющих друг друга подпространства. Первое трехмерное подпространство ядра \mathcal{KR}_i задается вектор-столбцами подматрицы \mathbf{KR}_i . Все элементы этих векторов являются действительными числами, а последние их $2J_{\Sigma_i}$ элементов равны нулю. Таким образом, подпространство \mathcal{KR}_i полностью лежит в действительном подпространстве \mathcal{XR}_i пространства \mathcal{X}_i и по этой причине является ортогональным подпространствам $\mathcal{XN1}_i$ и \mathcal{XNtw}_i .

Второе $(M_i + J_i - 1)$ -мерное подпространство ядра $\mathcal{KN1}_i$ задается вектор-столбцами подматрицы $\mathbf{KN1}_i$. Первые $4M_i + 3J_i$ координат всех точек подпространства $\mathcal{KN1}_i$ являются действительными величинами. Следующие J_{Σ_i} координат его точек являются целыми числами, откладываемыми вдоль осей системы координат, выделенных для компонент вектора произвольных целочисленностей $\mathbf{N1}_i^*$. Остальные J_{Σ_i} координат точек подпространства $\mathcal{KN1}_i$ ядра — нулевые. Таким образом, подпространство $\mathcal{KN1}_i$ является «полудискретным» в том смысле, что первые $(4M_i + 3J_i)$ координат его точек могут принимать действительные значения, но следующие J_{Σ_i} координат тех же точек являются целыми числами. Указанные целочисленные координаты являются линейными комбинациями состоящих из единиц и нулей столбцов матричного блока $\mathbf{K}_{22,i} = \mathbf{K}_{33,i}$ при условии, что коэффициенты указанных линейных комбинаций могут быть только произвольными целыми числами. Все эти линейные комбинации задают в подпространстве $\mathcal{XN1}_i$ $(M_i + J_i - 1)$ -мерную

подрешетку $\mathbb{KN1}_i$ ядра, J_{Σ_i} -мерной решетки $\mathbb{XN1}_i$. Можно показать, что состоящие из единиц и нулей вектор-столбцы матричного блока $\mathbf{K}_{22,i} = \mathbf{K}_{33,i}$ являются линейно независимыми. Кроме того, в сетевых задачах, матрицы сценария которых удовлетворяют неравенству (8), будет с очевидностью выполняться более слабое ограничение $J_{\Sigma_i} > M_i + J_i - 1$. Это означает, что вектор-столбцы матричного блока $\mathbf{K}_{22,i} = \mathbf{K}_{33,i}$ являются репером целочисленной подрешетки $\mathbb{KN1}_i$ ядра (РЦПЯ-N1) J_{Σ_i} -мерной решетки $\mathbb{XN1}_i$.

Третье $(M_i + J_i - 1)$ -мерное подпространство ядра \mathcal{KNtw}_i образуется столбцами подматрицы \mathbf{KNtw}_i . Первые $4M_i + 3J_i$ координат всех точек подпространства \mathcal{KNtw}_i являются действительными величинами. Следующие J_{Σ_i} координат его точек — нулевые. Последние J_{Σ_i} координат точек третьего подпространства ядра являются целыми числами, откладываемыми вдоль осей системы координат, выделенных для компонент вектора произвольных целочисленностей \mathbf{Ntw}_i^* . Таким образом, подпространство \mathcal{KNtw}_i является «полудискретным» в том смысле, что первые $(4M_i + 3J_i)$ координат его точек могут принимать действительные значения, но последние J_{Σ_i} координат тех же точек являются целыми числами. Указанные целочисленные координаты также являются линейными комбинациями столбцов матричного блока $\mathbf{K}_{22,i} = \mathbf{K}_{33,i}$. Все эти линейные комбинации задают в подпространстве \mathcal{KNtw}_i $(M_i + J_i - 1)$ -мерную подрешетку \mathbb{KNtw}_i J_{Σ_i} -мерной решетки \mathbb{XNtw}_i . Репером целочисленной подрешетки ядра \mathbb{KNtw}_i (РЦПЯ-tw) являются состоящие

из единиц и нулей вектор-столбцы матричного блока
$$\mathbf{K}_{J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)}^{22.i} = \mathbf{K}_{J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)}^{33.i}.$$

Проиллюстрируем теперь на предельно простом примере трехмерного пространства особенности пространства \mathcal{X}_i исходных переменных $nx_i \times nx_i$ ($nx_i = 3$) и задания базисных векторов S -пространства, удовлетворяющих требованию перехода целочисленных компонент $\mathbf{N}\mathbf{1}_i^*$, $\mathbf{N}m\mathbf{w}_i^*$ вектора $J_{\Sigma,i} \times 1$ $J_{\Sigma,i} \times 1$

исходных переменных при его проецировании вдоль ядра на S -пространство, в целочисленные компоненты вектора новых переменных $\mathbf{x}_{net.i}$ $nx_i \times 1$

вдоль ядра на S -пространство, в целочисленные компоненты вектора новых переменных $\mathbf{x}_{net.s.i}$ (4). При этом, в связи с ограниченностью возможностей трехмерного пространства, для отображения всех особенностей многомерного пространства исходных переменных в наших примерах будут использоваться только одномерное пространство ядра $\mathcal{K}_{net.i}$, одномерное действительное $\mathcal{X}\mathcal{R}_i$ $nx_i \times (4M_i+3J_i)$ и одно двумерное (из двух возможных $\mathcal{X}\mathcal{N}\mathbf{1}_i$, $\mathcal{X}\mathcal{N}m\mathbf{w}_i$) дискретно-целочисленное подпространство $nx_i \times J_{\Sigma,i}$ $nx_i \times J_{\Sigma,i}$.

На рис. 1 представлен пример трехмерного ($nx_i = 3$) пространства \mathcal{X}_i исходных переменных xyz и одномерного ядра ($dfh_i = 1$), показанного красной пунктирной линией. Первая ось x , задает действительное пространство $\mathcal{X}\mathcal{R}_i$ $nx_i \times (4M_i+3J_i)$. Оси y и z задают дискретно-целочисленное подпространство ($\mathcal{X}\mathcal{N}\mathbf{1}_i$ либо $\mathcal{X}\mathcal{N}m\mathbf{w}_i$), т. е. переменные, откладываемые вдоль этих осей, могут принимать только произвольные целочисленные значения. Координаты жирных точек черного и красного цветов, показанные на рис. 1 в плоскости yz , являются теми значениями, которые могут приобретать переменные y и z , а сами эти точки — узлами решетки двумерного дискретно-целочисленного подпространства пространства yz (в многомерном случае это одна из двух возможных решеток $\mathbb{X}\mathbb{N}\mathbf{1}_i$, $\mathbb{X}\mathbb{N}m\mathbf{w}_i$). $J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}$ $J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}$

Координаты точек, лежащих на черных пунктирных линиях, исходящих из жирных точек чер-

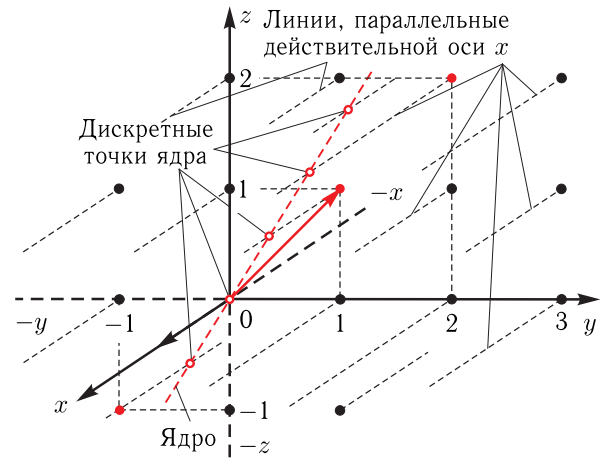


Рис. 1. Пример трехмерного ($nx_i = 3$) пространства \mathcal{X}_i исходных переменных xyz $nx_i \times nx_i$

ного и красного цветов параллельно оси x , являются тем множеством значений, которые могут принимать исходные переменные xyz . Видим, что пространство исходных переменных xyz — «полудискретно» в том смысле, что оно непрерывно по координате x и дискретно-целочисленно по координатам y и z . Координаты y и z дискретных точек, показанных на рис. 1 красными колечками, располагающимися вдоль ядра, являются целыми числами. Координата же x этих точек является действительным числом. Таким образом, в рассматриваемом нами примере трехмерного пространства исходных переменных xyz множество точек ядра является дискретным. Координата x этих точек является действительным числом, а координаты y и z — целыми числами. Жирными точками красного цвета на рис. 1 показана подрешетка целочисленных координат точек ядра (в многомерном случае это одна из двух возможных подрешеток $\mathbb{K}\mathbb{N}\mathbf{1}_i$, $J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)$ $J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)$), а красной полужирной стрелкой по-

казан РЦПЯ этой подрешетки (т. е. репер подрешетки, образуемый в многомерном случае целочисленными вектор-столбцами блока $\mathbf{K}_{J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)}^{22.i} = \mathbf{K}_{J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)}^{33.i}$ матрицы ядра $\mathbf{K}_{nx_i \times dfh_i}^{net.i}$ (3)).

На рис. 2–3 синими полужирными стрелками показаны возможные реперы подрешеток, дополняющие РЦПЯ (красную полужирную стрелку) до полного репера решетки, образуемой крас-

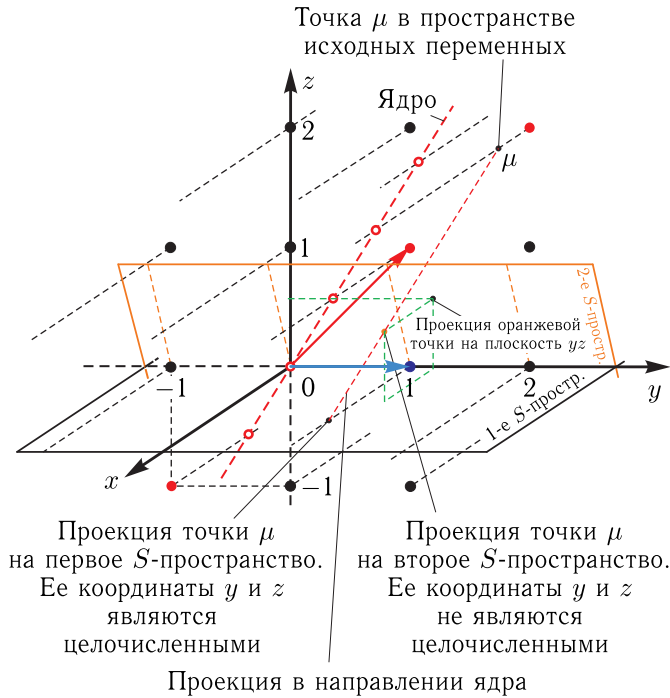


Рис. 2. Пример двух S -пространств, задаваемых целочисленным вектором $y = 1, z = 0$ (синего цвета), дополняющим репер $y = 1, z = 1$ (вектор красного цвета) подрешетки целочисленных координат точек ядра, до полного репера целочисленной решетки дискретно-целочисленного подпространства yz

ными и черными точками, лежащими в дискретно-целочисленном подпространстве yz (в многомерном случае до полного репера одной из двух возможных решеток $\mathbb{XN}1_i, \mathbb{XNm}w_i$). Т.е. красная $J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}$ $J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}$ и синяя стрелки на рис. 2–3 вместе образуют один из множества возможных реперов целочисленной решетки, лежащей в дискретно-целочисленном подпространстве yz .

Черным и оранжевым цветом на рис. 2–3 показаны два двумерных S -пространства (плоскостей в рассматриваемом нами примере). Будем далее для удобства эти S -пространства называть черным и оранжевым. Первым базисным вектором черного S -пространства являются ось x , вторым базисным вектором этого же пространства является синяя полужирная стрелка, дополняющая красную стрелку до полного репера решетки, лежащей в дискретно-целочисленном подпространстве yz . Поскольку ось x ортогональна дискретно-целочисленному пространству yz , координаты y и z 1-го базисного



Рис. 3. Пример двух S -пространств, задаваемых целочисленным вектором $y = 2, z = 1$ (синего цвета), дополняющим репер $y = 1, z = 1$ (вектор красного цвета) подрешетки целочисленных координат точек ядра, до полного репера целочисленной решетки дискретно-целочисленного подпространства yz

вектора черного S -пространства равны нулю и соответственно координата x второго базисного вектора (синяя полужирная стрелка) также равна нулю.

В качестве 1-го базисного вектора оранжевого S -пространства может служить вектор, не лежащий ни в одной из плоскостей xy, yz, xz . Вторым базисным вектором оранжевого S -пространства является та же синяя полужирная стрелка. Поскольку 1-й базисный вектор оранжевого S -пространства не является ортогональным дискретно-целочисленному пространству yz , его компоненты yz не равны нулю.

Черной точкой, обозначенной символом μ , на рис. 2–3 показана некоторая произвольная точка пространства исходных переменных. Как видно из рис. 2–3, координаты y и z проекции вдоль ядра точки μ на черное S -пространство остаются целочисленными, в то время как координаты y и z проекции вдоль ядра той же точки на оранжевое S -пространство перестают быть таковыми. Таким образом, многомерное S -пространство, сохраняющее целочисленность проекций вдоль ядра компонент $N\mathbf{1}_i^*$, $N\mathbf{m}w_i^*$ вектора $\mathbf{x}_{net,i}^*$ исходных $J_{\Sigma,i} \times 1$ $J_{\Sigma,i} \times 1$ $n \times 1$

переменных на него, должно ориентироваться так же, как черные S -пространства, показанные на рис. 2–3, т. е. в составе $rnkh_i$ базисных векторов этого многомерного S -пространства должны быть три группы:

- 1-я группа из $(4M_i + 3J_i - 3)$ линейно независимых векторов размерности nx_i , образуют подматрицу \mathbf{SR}_i $_{nx_i \times (4M_i + 3J_i - 3)}$. Эти векторы лежат в подпространстве \mathcal{XR}_i $_{nx_i \times (4M_i + 3J_i)}$ и задают $(4M_i + 3J_i - 3)$ -мерное подпространство \mathcal{SR}_i $_{nx_i \times (4M_i + 3J_i - 3)}$, дополняющее подпространство ядра \mathcal{KR}_i $_{nx_i \times 3}$ до базиса подпространства \mathcal{XR}_i $_{nx_i \times (4M_i + 3J_i)}$;
- 2-я группа из $(J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)$ линейно независимых векторов размерности nx_i , образуют подматрицу $\mathbf{SN1}_i$ $_{nx_i \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}$ и задают подпространство $\mathcal{SN1}_i$ $_{nx_i \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}$. Все компоненты векторов 2-й группы равны нулю, за исключением компонент с номерами $(4M_i + 3J_i + 1) - (4M_i + 3J_i + J_{\Sigma,i})$. Значения этих компонент являются векторами репера, дополняющего РЦПЯ- $N1$, образуемого вектор-столбцами матричного блока $\mathbf{K}_{22,i}$ $_{J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1)}$ = $\mathbf{K}_{33,i}$ $_{J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1)}$, до репера решетки $\mathcal{XN1}_i$ $_{J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}}$;
- 3-я группа также из $(J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)$ линейно независимых векторов размерности nx_i , образуют подматрицу \mathbf{SNmw}_i $_{nx_i \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}$ и задают подпространство \mathcal{SNmw}_i $_{nx_i \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}$. Все компоненты векторов третьей группы равны нулю, за исключением компонент с номерами $(4M_i + 3J_i + J_{\Sigma,i} + 1) - nx_i$. Значения этих компонент являются векторами репера, дополняющего РЦПЯ- mw , образуемого вектор-столбцами матричного блока $\mathbf{K}_{22,i}$ $_{J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1)}$ = $\mathbf{K}_{33,i}$ $_{J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1)}$, до репера решетки \mathcal{XNmw}_i $_{J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}}$.

Из вышепредставленных требований вытекает следующая структура матрицы $\mathbf{S}_{net,i}$ $_{nx_i \times rnkh_i}$, обладающая свойством сохранения целочисленности компоненты $\mathbf{N1}_i^*$ $_{J_{\Sigma,i} \times 1}$, \mathbf{Nmw}_i^* $_{J_{\Sigma,i} \times 1}$ вектора $\mathbf{x}_{net,i}^*$ $_{nx_i \times 1}$ исходных переменных при его проецировании на S -пространство:

$$\mathbf{S}_{net,i} = \begin{matrix} nx_i \times rnkh_i \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{SR}_i & \mathbf{SN1}_i & \mathbf{SNmw}_i \\ \times (4M_i + 3J_i - 3) & \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) & \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) \\ \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (4M_i + 3J_i) \times & (4M_i + 3J_i) \times & (4M_i + 3J_i) \times \\ \times (4M_i + 3J_i - 3) & \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) & \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{0} \\ J_{\Sigma,i} \times & J_{\Sigma,i} \times & J_{\Sigma,i} \times \\ \times (4M_i + 3J_i - 3) & \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) & \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{33} \\ J_{\Sigma,i} \times & J_{\Sigma,i} \times & J_{\Sigma,i} \times \\ \times (4M_i + 3J_i - 3) & \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) & \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) \end{array} \right] \end{matrix} \quad (9)$$

Из структуры матрицы $\mathbf{S}_{net,i}$ $_{nx_i \times rnkh_i}$ (9) следует, что подпространства \mathcal{SR}_i $_{nx_i \times (4M_i + 3J_i - 3)}$, $\mathcal{SN1}_i$ $_{nx_i \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}$, \mathcal{SNmw}_i $_{nx_i \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}$ S -пространства, являются ортогональными друг другу. Каждое из этих подпространств может задаваться бесконечным количеством соответствующих им наборов базисных векторов, но при этом ортогональность этих наборов друг к другу, будет сохраняться. Отсюда следует, что базисные векторы, задающие каждое из подпространств \mathcal{SR}_i $_{nx_i \times (4M_i + 3J_i - 3)}$, $\mathcal{SN1}_i$ $_{nx_i \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}$, \mathcal{SNmw}_i $_{nx_i \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}$, можно выбрать независимо друг от друга.

Из соображений простоты и удобства решения расширенной системы линейных уравнений (7), желательно базисные векторы в каждом из вышеупомянутых наборов задавать ортогональными друг к другу и ориентировать их вдоль осей системы координат. Для поиска набора базисных векторов, задающих подпространство \mathcal{SR}_i $_{nx_i \times (4M_i + 3J_i - 3)}$,

рассмотрим составную матрицу

$$\left[\begin{array}{cc} \overbrace{\mathbf{KR}_i}^{nx_i \times 3} & \overbrace{\mathbf{SR}_i}^{nx_i \times (4M_i+3J_i-3)} \\ \underbrace{\mathbf{K}_{11.i}}_{(4M_i+3J_i) \times 3} & \underbrace{\mathbf{PE}_{11.i}}_{(4M_i+3J_i) \times (4M_i+3J_i-3)} \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{0} \\ \underbrace{\phantom{\mathbf{0}^*}}_{J_{\Sigma,i} \times 3} & \underbrace{\phantom{\mathbf{0}}}_{J_{\Sigma,i} \times (4M_i+3J_i-3)} \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{0} \\ \underbrace{\phantom{\mathbf{0}^*}}_{J_{\Sigma,i} \times 3} & \underbrace{\phantom{\mathbf{0}}}_{J_{\Sigma,i} \times (4M_i+3J_i-3)} \end{array} \right], \quad (10)$$

в которой вектор-столбцы подматрицы \mathbf{KR}_i задают подпространство \mathcal{KR}_i ядра, а подматрица $\mathbf{PE}_{11.i}$ является частью единичной матрицы \mathbf{E} , из которой удалены три столбца с номерами равными номерам произвольно выбранных единиц в каждом из трех столбцов матричного блока $\mathbf{K}_{11.i}$. В связи с тем, что в начале каждого столбца матричного блока $\mathbf{K}_{11.i}$

располагается M_i нулей, номера произвольно выбираемых в каждом из этих столбцов единиц должны быть больше M_i . Нетрудно убедиться, что вектор-столбцы составной матрицы (10) являются линейно независимыми. Из этого следует, что вектор-столбцы подматрицы \mathbf{SR}_i , выделенной в (10)

фигурной скобкой, являются набором ортогональных векторов, ориентированных вдоль осей системы координат и задающих подпространство \mathcal{SR}_i , дополняющее подпространство ядра \mathcal{KR}_i до базиса подпространства \mathcal{XR}_i .

Для поиска набора базисных векторов, задающих подпространство $\mathcal{SN}1_i$, рассмотрим составную матрицу

$$\left[\begin{array}{cc} \overbrace{\mathbf{KN}1_i}^{nx_i \times (M_i+J_i-1)} & \overbrace{\mathbf{SN}1_i}^{nx_i \times (J_{\Sigma,i}-M_i-J_i+1)} \\ \underbrace{\mathbf{K}_{12.i}}_{(4M_i+3J_i) \times (M_i+J_i-1)} & \underbrace{\mathbf{0}}_{(4M_i+3J_i) \times (J_{\Sigma,i}-M_i-J_i+1)} \\ \mathbf{K}_{22.i} & \mathbf{PE}_{22} \\ \underbrace{\phantom{\mathbf{K}_{22.i}}}_{J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)} & \underbrace{\phantom{\mathbf{PE}_{22}}}_{J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i}-M_i-J_i+1)} \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{0} \\ \underbrace{\phantom{\mathbf{0}^*}}_{J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)} & \underbrace{\phantom{\mathbf{0}}}_{J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i}-M_i-J_i+1)} \end{array} \right], \quad (11)$$

в которой вектор-столбцы подматрицы $\mathbf{KN}1_i$ задают подпространство $\mathcal{KN}1_i$ ядра;

$\mathbf{K}_{12.i}$, $\mathbf{K}_{22.i}$ — матричные блоки матрицы ядра $\mathbf{K}_{net.i}$ (3); матричный блок $\mathbf{PE}_{22.i}$ является частью единичной

матрицы \mathbf{E} , из которой удалены $M_i + J_i - 1$ столбцов, номера которых выбираются в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Все столбцы и строки матричного блока $\mathbf{K}_{22.i}^{full}$ помечаются как пригодные для дальнейшего использования.

2. Последовательно просматриваются столбцы матричного блока $\mathbf{K}_{22.i}^{full}$, пригодные для дальнейшего использования. В каждом из этих столбцов выбирается произвольно расположенная единица, лежащая в строке матричного блока $\mathbf{K}_{22.i}^{full}$, пригодной для дальнейшего использования. Помечается столбец единичной матрицы \mathbf{E} , номер которого равен номеру строки матричного блока $\mathbf{K}_{22.i}^{full}$, содержащей произволь-

но выбранную единицу. Столбец и строка матричного блока $\mathbf{K}_{22.i}^{full}$, в котором располагалась эта произвольно выбранная единица, помечаются как непригодные для дальнейшего использования.

3. Пункт 2 выполняется до тех пор, пока в матрице \mathbf{E} не будет помечено $M_i + J_i - 1$ столбцов.

4. Помеченные столбцы исключаются из единичной матрицы \mathbf{E} , в результате чего формируется блок $\mathbf{PE}_{22.i}$.

Нетрудно убедиться, что вектор-столбцы составной $(J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i})$ -матрицы

$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{22.i} & \mathbf{PE}_{22} \\ \underbrace{\phantom{\mathbf{K}_{22.i}}}_{J_{\Sigma,i} \times (M_i+J_i-1)} & \underbrace{\phantom{\mathbf{PE}_{22}}}_{J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i}-M_i-J_i+1)} \end{array} \right]$ являются линейно независимыми. Все компоненты вектор-столбцов этой составной матрицы равны нулю

либо единице, т. е. все эти вектор-столбцы лежат только внутри, либо на поверхности ($J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}$)-мерного куба с единичными ребрами. Из этого следует, что ортогональные и ориентированные вдоль осей системы координат вектор-столбцы блока PE_{22} являются

$$J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)$$

векторами репера, дополняющего РЦПЯ- $N1$, образуемого вектор-столбцами матричного блока

$$K_{22,i} = K_{33,i}, \text{ до репера решетки } J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1) \quad J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1)$$

$\mathbb{X}N1_i$.

$J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}$

В связи с равенством блоков $K_{22,i} = K_{33,i}$ заключаем, что в качестве ортого-

нальных и ориентированных вдоль осей системы координат векторов репера, дополняющих РЦПЯ- mw ,

определяемого вектор-столбцами матричного блока

$$K_{22,i} = K_{33,i}, \text{ до репера решетки } J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1) \quad J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1)$$

$\mathbb{X}Nmw_i$ могут использоваться вектор-столбцы бло-

ка PE_{33}

$$J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) \quad J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)$$

Обобщая вышесказанное, приходим к выводу о том, что в качестве ортогональных и ориентированных вдоль осей системы координат базисных векторов S -пространства могут использоваться вектор-столбцы матрицы

$$S_{net,i} = nx_i \times rnk h_i$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{SR_{net,i}}_{\substack{nx_i \times \\ \times (4M_i + 3J_i - 3)}} & \underbrace{SN1_{net,i}}_{\substack{nx_i \times \\ \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}} & \underbrace{SNmw_{net,i}}_{\substack{nx_i \times \\ \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}} \\ \underbrace{PE_{11,i}}_{\substack{(4M_i + 3J_i) \times \\ \times (4M_i + 3J_i - 3)}} & \underbrace{0^*}_{\substack{(4M_i + 3J_i) \times \\ \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}} & \underbrace{0^*}_{\substack{(4M_i + 3J_i) \times \\ \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}} \\ \underbrace{0^*}_{\substack{J_{\Sigma,i} \times \\ \times (4M_i + 3J_i - 3)}} & \underbrace{PE_{22}}_{\substack{J_{\Sigma,i} \times \\ \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}} & \underbrace{0^*}_{\substack{J_{\Sigma,i} \times \\ \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}} \\ \underbrace{0^*}_{\substack{J_{\Sigma,i} \times \\ \times (4M_i + 3J_i - 3)}} & \underbrace{0^*}_{\substack{J_{\Sigma,i} \times \\ \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}} & \underbrace{PE_{33}}_{\substack{J_{\Sigma,i} \times \\ \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Произвольный выбор единиц в столбцах матриц $K_{11,i}$, $K_{22,i} = K_{33,i}$ в вы-

$$(4M_i + 3J_i) \times 3 \quad J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1) \quad J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1)$$

шерассмотренных алгоритмах, порождает возможность формирования множества различающихся блоков

$$PE_{11,i}, \quad PE_{22} = (4M_i + 3J_i) \times (4M_i + 3J_i - 3) \quad J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) = PE_{33} \quad J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)$$

Все блоки, входящие в эти множества, будут обладать необходимыми свойствами. Однако для конкретного применения необходимо выбрать единственный блок в каждом из этих множеств. Такой выбор может быть осуществлен на основе учета определенных дополнительных практических соображений.

При выборе единственного блока $PE_{11,i}$ следует учитывать, что

номера трех удаляемых из единичной матрицы E столбцов равны номерам

$(4M_i + 3J_i) \times (4M_i + 3J_i)$ трех действительных переменных из последовательного списка компонент действительных

векторов $dT_{\rho,i}^*$, $dT_{L,i}^*$, $B_{mw,i}^*$, $dt_{\rho,i}^*$, $dt_{L,i}^*$, $b_{mw,i}^*$,

$M_i \times 1$, $M_i \times 1$, $M_i \times 1$, $J_i \times 1$, $J_i \times 1$, $J_i \times 1$ входящих в состав вектора исходных переменных $x_{net,i}^*$. Эти три переменные появятся в качестве

смещающих переменных в линейных комбинациях, являющихся компонентами вектора новых

переменных $x_{net.s,i}$ (4). Оценивание компонент

этого вектора осуществляется путем решения расширенной полноранговой системы линейных

уравнений (7). С учетом этого в качестве номеров трех удаляемых столбцов можно, например,

выбрать номера $M_i + r$, $2M_i + r$, $3M_i + r$, где r (*reference*) — номер опорной станции наземной

сети. При таком выборе оценки вектора новых переменных $x_{net.s,i}$ (4) будут формироваться

в шкале времени опорной станции наземной сети. Если же при этом осуществлять дополнительно

каким-либо образом измерение смещения шкалы времени опорной станции относительно шкалы вре-

мени ГНСС, по сигналам которой осуществляется ВАМО, то такие измерения позволяют формировать

высокоточные абсолютные координаты потребителя в шкале времени ГНСС.

Для выбора единственного блока PE_{22} = PE_{33} столбцы

$$J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1) \quad J_{\Sigma,i} \times (J_{\Sigma,i} - M_i - J_i + 1)$$

матричного блока $K_{22.i}^{full}$, пригодные для

дальнейшего использования, могут просматриваться не последовательно, а в порядке наличия в них единицы, указывающей на НКА и станцию, видящую этот НКА под наибольшим углом места. Номер строки, в которой располагается эта единица, будет помечать очередной столбец единичной матрицы $E_{J_{\Sigma.i} \times J_{\Sigma.i}}$. Такой порядок просмотра столбцов матричного блока

$K_{22.i}^{full}$ будет приводить к исключению из единичной матрицы $E_{J_{\Sigma.i} \times J_{\Sigma.i}}$ столбцов, соответствующих

НКА, которые видны всей наземной сетью под наибольшими углами места. В результате исключенные из единичной матрицы $E_{J_{\Sigma.i} \times J_{\Sigma.i}}$ столбцы будут соответствовать тем НКА, которые видны всей сетью под наибольшими углами места.

Для составления расширенной полноранговой системы линейных уравнений (7), которую необходимо решать для оценивания компонент вектора новых переменных $x_{net.s.i}$ (4), необходимо определить матрицу $S_{net.i}^{\perp}$. Учитывая,

что подматрицы $SR_{net.i}$, $SN1_{net.i}$, $SNmw_{net.i}$ матрицы $S_{net.i}$ (12) являются ортогональными друг другу, матрицу $S_{net.i}^{\perp}$ можно записать в следующем виде:

$$S_{net.i}^{\perp} = \begin{bmatrix} SR_{net.i}^{\perp} & SN1_{net.i}^{\perp} & SNmw_{net.i}^{\perp} \\ \times (4M_i+3J_i-3) & \times (J_{\Sigma.i}-M_i-J_i+1) & \times (J_{\Sigma.i}-M_i-J_i+1) \\ PE_{11.i}^{\perp} & \mathbf{0}^* & \mathbf{0}^* \\ (4M_i+3J_i) \times 3 & (4M_i+3J_i) \times (M_i+J_i-1) & (4M_i+3J_i) \times (M_i+J_i-1) \\ \mathbf{0}^* & PE_{22.i}^{\perp} & \mathbf{0}^* \\ J_{\Sigma.i} \times 3 & J_{\Sigma.i} \times (M_i+J_i-1) & J_{\Sigma.i} \times (M_i+J_i-1) \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{0}^* & PE_{33.i}^{\perp} \\ J_{\Sigma.i} \times 3 & J_{\Sigma.i} \times (M_i+J_i-1) & J_{\Sigma.i} \times (M_i+J_i-1) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где блоки $PE_{11.i}^{\perp}$, $PE_{22.i}^{\perp} = PE_{33.i}^{\perp}$ образуются из столбцов, исключенных из единичных матриц $E_{(4M_i+3J_i) \times (4M_i+3J_i)}$, $E_{J_{\Sigma.i} \times J_{\Sigma.i}}$ при формировании матричных блоков $PE_{11.i}^{\perp}$, $PE_{22.i}^{\perp} = PE_{33.i}^{\perp}$ соответственно. Таким образом, все столбцы матрицы $S_{net.i}^{\perp}$ (13) содержат единственную единицу, остальные элементы этих столбцов равны 0.

В трех столбцах блока $PE_{11.i}^{\perp}$ единицы будут располагаться на позициях, занимаемых в векторе исходных переменных $x_{net.i}^*$ смещением $dT_{\rho.r.i}^*$ показаний ионосферосвободных кодовых часов, смещением $dT_{L.r.i}^*$ показаний ионосферосвободных фазовых часов и смещением $b_{mw.r.i}^*$ комбинации Мельбурна-Вуббена в аппаратуре опорной станции наземной сети.

В $M_i + J_i - 1$ столбцах блоков $PE_{22.i}^{\perp} = PE_{33.i}^{\perp}$ единицы будут располагаться на позициях, определяющих НКА, видимых хотя бы одной станцией наземной сети под наибольшим углом места.

Из равенства $(S_{net.i}^{\perp})^T x_{net.i} = \mathbf{0}$ (6), следует, что элементы вектора решения $\hat{x}_{net.s.i}$, полноранговой системы (7), стоящие на местах, определяемых положением единиц в dfh_i столбцах матрицы $S_{net.i}^{\perp}$ (13), должны быть равны нулю.

Но если заранее известно, что dfh_i элементов вектора решения $\hat{x}_{net.s.i}$ системы (7) являются нулевыми, то оценка остальных $rnkh_i$ элементов вектора решений этой системы может быть получена путем решения более простой системы линейных уравнений

$$Y_{net.i} = H_{net.cmpr.i} x_{net.cmpr.i} + \Xi_i, \quad (14)$$

где $H_{net.cmpr.i}$ — сжатая матрица, получаемая из исходной матрицы связи $H_{net.i}^*$

отбрасыванием dfh_i столбцов с номерами равными номерам позиций, в которых расположены единицы в dfh_i столбцах матрицы $S_{net.i}^\perp$ (13),

$x_{net.cmpr.i}$ — сжатый вектор оцениваемых переменных, получаемый из вектора переменных $x_{net.s.i}$ (4), в котором исключены все нули.

Крайне жесткие ограничения объема статьи не позволяют рассмотреть пример решения системы (14). В работе [3], математической основой которой является АТГ, такой пример приводится.

Заключение

Рассмотрены алгебраические основы решения сетевой задачи с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений при ВАМО по сигналам ГНСС-КРК на основе ТРУ.

В решении сетевой задачи, полученном в [3] на основе АТГ, структура ключевой матрицы базисных векторов $S_{net.i}$ (9) S -пространства вводится без доказательства. Использование ТРУ позволяет обосновать эту структуру, опираясь на требование сохранения целочисленности неоднозначностей псевдофазовых измерений при их проецировании на S -пространства вдоль ядра матрицы $H_{net.i}^*$ системы линейных уравнений (1) сетевой задачи.

В решении сетевой задачи, полученном в [3] на основе АТГ, алгоритмы вычисления ортогональных и ориентированных вдоль осей системы координат вектор-столбцов матричных блоков,

$$PE_{11.i}^\perp \quad PE_{22.i}^\perp = PE_{33.i}^\perp \quad \text{матрицы}$$

$$(4M_i + 3J_i) \times 3 \quad J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1) \quad J_{\Sigma,i} \times (M_i + J_i - 1)$$

$S_{net.i}^\perp$ (13), приводятся без доказательства. Использование ТРУ позволяет обосновать эти алгоритмы, опираясь на свойство векторов репера целочисленной решетки, расположенных внутри либо на поверхности многомерного куба с единичными ребрами.

Использование ТРУ позволяет решать пользовательские и сетевые задачи с разрешением целочисленной неоднозначности псевдофазовых измерений не только для ГНСС-КРК, но и для ГНСС с частотным разделением (ГНСС-ЧРК). То, что до настоящего времени в литературе не удается обнаружить решение этих задач для ГНСС-ЧРК, свидетельствует о том, что АТГ не пригодна для их решения. Решение пользовательской и сетевой задачи при ВАМО по сигналам ГНСС-ЧРК на основе ТРУ будет рассмотрено в следующих работах авторов.

Список литературы

1. *Поваляев А.А., Бабуринов А.А., Подкорытов А.Н.* Применение теории решетчатых упаковок в задаче высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям параметров сигналов ГНСС с кодовым разделением // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2021. Т. 8, вып. 2. С. 51–61.
2. *Поваляев А.А., Подкорытов А.Н., Никитин С.А., Филимонова Д.В.* Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2019. Т. 6, вып. 1. С. 4–16.
3. *Поваляев А.А., Подкорытов А.Н., Никитин С.А., Филимонова Д.В.* Определение временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2019. Т. 6, вып. 2. С. 3–16.
4. *de Jonge P.J.* A processing Strategy for the Application of the GPS in Networks. Publications on Geodesy 46. Delft, August 1998.
5. *Рышков С.С., Барановский Е.П.* Классические методы теории решетчатых упаковок // Успехи математических наук. Июль–август, 1979. Т. 34, вып. 4(208).