РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
2021, том 8, выпуск 2, с. 51–61

КОСМИЧЕСКИЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ПРИБОРЫ. РАДИОЛОКАЦИЯ И РАДИОНАВИГАЦИЯ

УДК 629.78 DOI 10.30894/issn2409-0239.2021.8.2.51.61

Применение теории решетчатых упаковок в задаче высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным измерениям в ГНСС с кодовым разделением

А. А. Поваляев, *д. т. н., профессор, povalyaev_aa@spacecorp.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
ФГБОУ «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Российская Федерация

А. А. Бабурин, *contact@spacecorp.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

А. Н. Подкорытов, *к. т. н., contact@spacecorp.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
ФГБОУ «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается применение теории решетчатых упаковок в пользовательской задаче оперативного целочисленного высокоточного абсолютного местоопределения с ошибками, обычно не превышающими 1–3 см, по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов. Местоопределения осуществляются путем обработки ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз с использованием корректирующих поправок и разрешением неоднозначности целочисленностей псевдофаз.

Основная проблема алгоритмов обработки измерений в задачах высокоточного абсолютного местоопределения (ВАМО) заключается в преодолении недостатка ранга систем линейных уравнений, получаемых путем линеаризации нелинейных математических моделей измерений. В настоящее время достаточно хорошо развито действительное ВАМО, в котором недостаток ранга преодолевается путем объединения ряда систематических смещений в математических моделях измерений с целочисленностями псевдофаз. В результате число неизвестных в системе уменьшается до ранга матрицы этой системы, что позволяет однозначно оценить высокоточные координаты потребителя и значения новых переменных, порождаемых проведенными объединениями. Однако при этом теряется информация о целочисленностях псевдофаз, что приводит к значительному увеличению интервала времени до получения оценок координат потребителя с ошибками ∼1–3 см. Привлечение в обработку информации о целочисленностях псевдофазовых измерений возможно путем применения алгоритмов разрешения неоднозначности этих целочисленностей. Но в результате проведенных объединений целочисленность разрушается, что делает невозможным применение этих алгоритмов.

В целочисленном ВАМО недостаток ранга преодолевается путем проецирования пространства переменных исходной системы линейных уравнений на так называемое S-пространство, размерность которого равна рангу этой системы. Ориентация S-пространства и направление проецирования выбираются таким образом, чтобы переменные исходной системы, соответствующие координатам потребителя, при проецировании не менялись и проекции целочисленных переменных этой системы оставались целыми. Это позволяет оценивать высокоточные координаты потребителя с привлечением информации о целочисленной природе псевдофазовых неоднозначностей.

В литературе по целочисленному ВАМО для сигналов ГНСС с кодовым разделением приводится описание ориентации S-пространства с нужными свойствами, но отсутствует описание способа ее определения. В данной статье на основе понятий теории решетчатых упаковок рассматривается алгоритм определения S-пространства с нужными свойствами. Показано, что существует бесконечное множество таких S-пространств, связанных между собой унимодулярными преобразованиями, и предложена методика, позволяющая осуществить выбор из этого множества S-пространства, использование которого требует минимальных вычислительных затрат.

Применение теории решетчатых упаковок для решения сетевой задачи ВАМО по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов, в которой определяются корректирующие поправки для пользовательской задачи, будет рассмотрено в последующей публикации авторов.

Ключевые слова: спутниковая навигация, навигационный космический аппарат (НКА), ионосферосвободные комбинации измерений псевдодальностей и псевдофаз по сигналам НКА с кодовым разделением, высокоточные абсолютные местоопределения (ВАМО), разрешение неоднозначности целочисленностей псевдофазовых измерений, репер целочисленной решетки, матрица унимодулярного преобразования

РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
2021, том 8, выпуск 2, с. 51–61

The Use of the Lattice Packing Theory for Precise Point Positioning with Ionosphere-Free Measurements in CDMA GNSS

A. A. Povalyaev, *Dr. Sci. (Engineering), Prof., povalyaev_aa@spacecorp.ru*
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

A. A. Baburin, *contact@spacecorp.ru*
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation

A. N. Podkorytov, *Cand. Sci. (Engineering), contact@spacecorp.ru*
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Abstract. The paper considers the use of the lattice packing theory for Integer Precise Point Positioning (Integer PPP) with the errors usually not exceeding 1–3 cm based on GNSS signals with code division multiple access (CDMA). Positioning is carried out by processing ionosphere-free linear combinations of code and phase measurements with ambiguity resolution employing satellite corrections.

The main issue of PPP algorithms is overcoming the rank deficiency problem of the linear equation system obtained by linearization of nonlinear mathematical models of measurements. Nowadays Float PPP is quite well developed, where rank deficiency is tackled by combining systematic biases in measurement models with integer carrier phase ambiguities. As a result, the number of unknowns is reduced to the rank of design matrix, which allows unambiguous estimation of precise user coordinates and values of new variables generated by the performed combinations. However, under such conditions the information about integer nature of carrier phase ambiguities is lost, and this leads to a significant increase in convergence time to obtain user coordinates estimates with the errors of 1–3 cm. It is possible to involve the information on the integer nature of phase ambiguities into processing by applying ambiguity resolution algorithms. Though, as a result of the conducted combinations, the integer nature is destroyed, which makes it impossible to apply these algorithms.

In Integer PPP rank deficiency is overcome by projecting the state space of the initial linear equation system onto a so-called S-space, whose dimension is equal to the rank of this system. The orientation of the S-space and the direction of projecting are chosen so that the variables of the initial system corresponding to user coordinates are not changed during the projecting and the projections of integer variables remain integer. This makes it possible to estimate precise user coordinates involving information on the integer nature of phase ambiguities.

In the literature on Integer PPP based on CDMA GNSS signals processing the description of the S-space orientation with the desired properties is given, but there is no description of the method to determine this orientation. This paper based on the notions of the lattice packing theory considers an algorithm for determining the S-space with the desired properties. It is shown that there exists an infinite set of such S-spaces connected by unimodular transformations, and a technique is proposed to enable selection from this set the S-space, which requires minimal computational cost.

The use of the lattice packing theory to the Integer PPP network solution with CDMA GNSS signals will be considered in the following publication of the authors.

Keywords: satellite navigation, space vehicle (SV), ionosphere-free linear combination of code and carrier phase measurements based on CDMA SV signals, Integer Precise Point Positioning (Integer PPP), ambiguity resolution of phase measurements, integer lattice reference, unimodular transformation matrix

Введение

Под высокоточным абсолютным местоопределением (ВАМО, англ. PPP — Precise Point Positioning) понимается определение абсолютных (относительно центра Земли) координат навигационной аппаратуры потребителя (НАП) с ошибками, обычно не превышающими 1–3 см, путем совместной обработки измерений псевдодальностей и псевдофаз с использованием корректирующих поправок (КП). Задачу определения координат НАП при наличии КП называют пользовательской задачей. Задачу определения КП путем совместной обработки измерений псевдодальностей и псевдофаз, формируемых сетью наземных станций, называют сетевой задачей.

В предыдущей работе авторов [1], посвященной решению пользовательской задачи ВАМО по ионосферосвободным комбинациям измерений параметров сигналов ГНСС с кодовым разделением каналов (ГНСС-КРК), использовались ключевые утверждения без их обоснования. В данной статье на основе применения теории решетчатых упаковок проводится обоснование ключевых положений, использованных без доказательства в работе [1]. В этой связи, с целью сокращения объема статьи, необходимые обозначения и исходные математические выражения заимствуются из работы [1], что предполагает знакомство читателя с этой работой.

Линеаризованные математические модели ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз в пользовательской задаче целочисленного ВАМО

В компактном матричном виде, заимствованном из [1], система линеаризованных уравнений для ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей и псевдофаз в ГНСС-КРК имеет вид (все векторы и матрицы, в отличие от скаляров, выделены полужирным шрифтом с указанием снизу их размерности)

$$\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{Y}_i} = \underset{3J_i\times(7+2J_i}{\mathbf{H}_i} \cdot \underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i} + \underset{3J_i\times 1}{\mathbf{\Xi}_i}, \tag{1}$$

где J_i — общее количество отслеживаемых НКА в i-й момент времени;

$$\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{Y}_i} = \left[\Delta\rho_i^1 \cdots \Delta\rho_i^{J_i}\ \Delta L_i^1 \cdots \Delta L_i^{J_i}\ \Delta mw_i^1 \cdots \Delta mw_i^{J_i}\right]^T \tag{2}$$

— $(3J_i\times 1)$ — вектор невязок ионосферосвободных комбинаций измерений псевдодальностей, псевдофаз и комбинаций Мельбурна–Вуббена;

$$\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i} = [\Delta x\ \Delta y\ \Delta z\ \Delta D_i\ dT_{\rho.i}\ dT_{L.i}\, b_{\mathrm{mw}}\ N1^1\ \cdots$$
$$\cdots\ N1^{J_i}\ N_{\mathrm{mw}}^1\ \cdots\ N_{\mathrm{mw}}^{J_i}]^T \tag{3}$$

— вектор переменных системы (1), в котором:

$\Delta x = x - x_c$, $\Delta y = y - y_c$, $\Delta z = z - z_c$ — поправки к грубым координатам x_c, y_c, z_c НАП, относительно которых осуществляется линеаризация;

ΔD_i — нескомпенсированная часть вертикальной тропосферной задержки (м) в точке расположения НАП;

$dT_{\rho.i}$, $dT_{L.i}$ — смещение показаний ионосферосвободных кодовых и фазовых часов НАП в i-й момент времени;

b_{mw} — смещение комбинации Мельбурна–Вуббена в НАП [1];

$N1^j$, $j = \overline{1, J_i}$ — ионосферосвободные комбинации целочисленностей псевдофазовых измерений;

N_{mw}^j, $j = \overline{1, J_i}$ — целочисленности комбинаций Мельбурна–Вуббена (подробности см. в [1]);

$\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{\Xi}_i} = \left[\xi_{\rho.i}^1\ \cdots\ \xi_{\rho.i}^{J_i}\ \xi_{L.i}^1\ \cdots\ \xi_{L.i}^{J_i}\ \xi_{\mathrm{mw}.i}^1\ \cdots\right.$
$\left.\cdots\ \xi_{\mathrm{mw}.i}^{J_i}\right]^T$ — вектор ошибок определения ионосферосвободных комбинаций псевдодальностей $\xi_{\rho.i}^{j_i}$, псевдофаз $\xi_{L.i}^{j_i}$ и Мельбурна–Вуббена $\xi_{\mathrm{mw}.k}^{j_k}$, выраженных в метрах;

$$\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i} = \begin{bmatrix} \underset{J_i\times 4}{\mathbf{A}_i} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{0}} \\ \underset{J_i\times 4}{\mathbf{A}_i} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & -\lambda_{\Delta_{nifr}}\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{E}} & -\lambda_{n_2ifr}\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{E}} \\ \underset{J_i\times 4}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{0}} & -\lambda_{\mathrm{mw}}\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \tag{4}$$

— матрица связи вектора наблюдений $\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{Y}_i}$ с вектором переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) системы (1).

Блоки матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4) имеют следующий смысл: $\underset{J_i\times 4}{\mathbf{A}_i}$ является матрицей вида $\underset{J_i\times 4}{\mathbf{A}_i} = \begin{bmatrix} h_{x.i}^1 & h_{y.i}^1 & h_{z.i}^1 & w_i^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{x.i}^{J_i} & h_{y.i}^{J_i} & h_{z.i}^{J_i} & w_i^{J_i} \end{bmatrix}$, где $h_{x.i}^j$, $h_{y.i}^j$, $h_{z.i}^j$, $j = \overline{1, J_i}$ — направляющие косинусы единичного вектора, ориентированного из точки фазового центра антенны j-го НКА в точку с грубыми координатами x_c, y_c, z_c НАП, относительно которой проведена линеаризация нелинейных математических моделей измерений; w_i^j — функция отображения вертикальной тропосферной задержки (м) в наклонную в соответствии с углом возвышения j-го НКА в i-й момент времени; $\underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}}$ — вектор-столбец из J_i нулей, $\underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}}$ — вектор-столбец из J_i единиц, $\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{0}}$ — нулевая матрица, $\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{E}}$ — единичная матрица.

Ковариационная матрица $\underset{3J_i\times 3J_i}{\mathbf{R}_i}$ вектора ошибок $\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{\Xi}_i}$ определения невязок ионосферосвободных комбинаций $\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{Y}_i}$ (2) может быть вычислена по формуле $\underset{3J_i\times 3J_i}{\mathbf{R}_i} = \underset{3J_i\times 4J_i}{\mathbf{T}}\ \underset{4J_i\times 4J_i}{\mathbf{R}_{ini.i}}\ \underset{4J_i\times 3J_i}{\mathbf{T}^T}$, где $\underset{4J_i\times 4J_i}{\mathbf{R}_{ini.i}}$ — диагональная ковариационная матрица ошибок $\xi_{\rho 1.i}^j$, $\xi_{\rho 2.i}^j$, $\xi_{L1.i}^j$, $\xi_{L2.i}^j$, указанных в таблице (см. [1]); $\underset{3J_i\times 4J_i}{\mathbf{T}}$ — матрица вида $\underset{3J_i\times 4J_i}{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{11}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{12}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{0}} \\ \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{23}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{24}} \\ \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{31}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{32}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{33}} & \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{34}} \end{bmatrix}$, где входящие в $\underset{3J_i\times 4J_i}{\mathbf{T}}$ блоки являются диагональными матрицами вида

$$\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{11}} = \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{23}} = \begin{bmatrix} n_1^2/(n_1^2-n_2^2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & n_1^2/(n_1^2-n_2^2) \end{bmatrix},$$

$$\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{12}} = \underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{24}} = \begin{bmatrix} -n_2^2/(n_1^2-n_2^2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -n_2^2/(n_1^2-n_2^2) \end{bmatrix},$$

$$\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{31}} = \begin{bmatrix} -n_1/(n_1+n_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -n_1/(n_1+n_2) \end{bmatrix},$$

$$\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{32}} = \begin{bmatrix} -n_2/(n_1+n_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -n_2/(n_1+n_2) \end{bmatrix},$$

$$\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{33}} = \begin{bmatrix} n_1/\Delta n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & n_1/\Delta n \end{bmatrix},$$

$$\underset{J_i\times J_i}{\mathbf{T}_{34}} = \begin{bmatrix} -n_2/\Delta n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -n_2/\Delta n \end{bmatrix}.$$

Матрица $\underset{3J_i\times 3J_i}{\mathbf{R}_i}$ должна обязательно учитываться в алгоритмах разрешения неоднозначности целочисленностей N_1^j, N_{mw}^j, $j = \overline{1, J_i}$, входящих в вектор переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) системы (1).

Для матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4) была найдена матрица $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$, столбцы которой являются базисными векторами ее ядра (нуль-пространства):

$$\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i} = \begin{bmatrix} \underset{5\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{5\times 1}{\mathbf{0}} \\ \lambda_{\Delta nifr} & \lambda_{n_2 ifr} \\ \mathbf{0} & \lambda_{\mathrm{mw}} \\ \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} \\ \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{5\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{5\times 1}{\mathbf{0}} \\ (n_1-n_2)\lambda_{ifr} & n_2\lambda_{ifr} \\ \mathbf{0} & (n_1+n_2)\lambda_{ifr} \\ \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} \\ \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Два столбца матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5) линейно независимы. Следовательно, ранг матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5) и недостаток ранга матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4) равен двум, а ранг матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4) равен $5+2J_i$. При этом недостаток ранга матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4) в пользовательской задаче ВАМО по сигналам ГНСС-КРК не зависит от числа НКА J_i. Таким образом, система уравнений (1) является сингулярной, т. е. имеет бесконечное множество решений, лежащих в двумерной плоскости решений, смещенной параллельно ядру, задаваемому вектор-столбцами матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5).

Из того, что первые пять элементов базисных вектор-столбцов матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5) ядра равны нулю, следует, что плоскость решений системы (1) ортогональна тем осям пространства оцениваемых переменных, вдоль которых откладываются первые пять элементов Δx, Δy, Δz, ΔD_i, $dT_{\rho.i}$ вектора переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) системы (1) [2–5]. Поэтому первые пять координат точек, лежащих в плоскости решений, являются одинаковыми для всех точек этой плоскости и, следовательно, могут быть оценены однозначно. Таким образом, система (1) и соответствующая ей матрица $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4) не являются сингулярными в полном смысле этого слова, поскольку первые пять элементов из вектора переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) могут быть оценены однозначно. Такие системы и соответствующие им матрицы в работе [1] названы полусингулярными.

Оценка однозначно оцениваемых переменных полусингулярных систем может быть осуществлена с помощью теории S-преобразования [6, 7]. В этой теории в пространстве переменных исходной системы линейных уравнений (1) вводится в рассмотрение так называемое S-пространство, размерность которого равна рангу $5+2J_i$ матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4). Если символом $\underset{(7+2J_i)\times(5+2J_i)}{\mathbf{S}_i}$ обозначить матрицу, столбцы которой являются базисными векторами S-пространства, то столбцы составной $(7+2J_i)\times$ $\times(7+2J_i)$-матрицы $\left[\underset{(7+2J_i)\times(5+2J_i)}{\mathbf{S}_i} \quad \underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}\right]$ являются одним из возможных наборов базисных векторов пространства переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3). Все точки пространства переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) системы (1) проецируются вдоль ядра $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5) на S-пространство. Вектор координат точек проекций на S-пространство образует вектор новых оцениваемых переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$. Для исключения путаницы вектор $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) далее будем называть вектором исходных переменных. Связь векторов $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$ новых и $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) исходных переменных определяется выражением [6, 7]

$$\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}} = \underset{(7+2J_i)\times(7+2J_i)}{\mathbf{P}_i} \; \underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}, \tag{6}$$

где

$$\underset{(7+2J_i)\times(7+2J_i)}{\mathbf{P}_i} = \underset{(7+2J_i)\times(7+2J_i)}{\mathbf{E}_i} - \\ - \underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i} \left(\underset{2\times(7+2J_i)}{(\mathbf{S}_i^{\perp})^T} \; \underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i} \right)^{-1} \underset{2\times(7+2J_i)}{(\mathbf{S}_i^{\perp})^T} \tag{7}$$

— матрица проекции на S-пространство;

$\underset{(7+2J_i)\times(7+2J_i)}{\mathbf{E}_i}$ — единичная матрица;

$\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ — матрица ранга 2, вектор-столбцы которой ортогональны S-пространству. С помощью матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ нормальное уравнение S-пространства записывается в виде

$$\underset{2\times(7+2J_i)}{(\mathbf{S}_i^{\perp})^T} \; \underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i} = \underset{2\times 1}{\mathbf{0}}. \tag{8}$$

Первыми пятью элементами вектора $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$ (6) новых переменных являются однозначно оцениваемые величины Δx, Δy, Δz, ΔD_i, $dT_{\rho.i}$. Остальными элементами вектора $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$ новых переменных являются определенные линейные комбинации элементов вектора исходных переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3), не входящих в первую пятерку, которые мы далее будем называть смещенно-оцениваемыми переменными («со-переменными»). Коэффициенты, с которыми «со-переменные» входят в эти линейные комбинации, определяются элементами матрицы проекции $\underset{(7+2J_i)\times(7+2J_i)}{\mathbf{P}_i}$ (7).

Оценка $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\widehat{\mathbf{x}}_{s.i}}$ нового вектора переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$ (6) может быть найдена из решения расширенной полноранговой системы линейных уравнений, получаемой путем объединения систем (1) и (8):

$$\begin{bmatrix} \underset{3J_i\times 1}{\mathbf{Y}_i} \\ \underset{2\times 1}{\mathbf{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i} \\ \underset{2\times(7+2J_i)}{(\mathbf{S}_i^{\perp})^T} \end{bmatrix} \cdot \underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i} + \begin{bmatrix} \underset{3J_i\times 1}{\boldsymbol{\Xi}_i} \\ \underset{2\times 1}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В общем случае матрицу $\underset{(7+2J_i)\times(5+2J_i)}{\mathbf{S}_i}$ и соответствующую ей матрицу $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ можно выбирать произвольно. Однако в нашем случае выбор этих матриц необходимо ограничить требованием сохранения целочисленности линейных комбинаций, возникающих при проецировании вдоль ядра на S-пространство целочисленных «со-переменных» $N_1^1, \ldots, N_1^{J_i}, N_{\mathrm{mw}}^1, \ldots, N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$, входящих в вектор исходных переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3).

Для выполнения этого требования рассмотрим $2J_i$-подпространство целочисленных переменных $N_1^1, \ldots, N_1^{J_i}, N_{\mathrm{mw}}^1, \ldots, N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$ пространства исходных переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3). Целочисленные переменные $N_1^1, \ldots, N_1^{J_i}, N_{\mathrm{mw}}^1, \ldots, N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$ образуют в этом подпространстве исходную прямоугольную целочисленную решетку, которая при проецировании вдоль ядра $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5) на S-пространство должна переходить также в целочисленную решетку размерности $2(J_i - 1)$. Из вида матрицы базисных векторов ядра $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5) видим, что проецирование исходной решетки, образуемой целочисленными переменными $N_1^1, \ldots, N_1^{J_i}, N_{\mathrm{mw}}^1, \ldots, N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$ на S-пространство вдоль ядра $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5), можно рассматривать как независимое и одинаковое проецирование вдоль целочисленного вектора $\underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}}$ двух ортогональных друг другу исходных целочисленных подрешеток. Первая исходная подрешетка порождается целочисленными переменными $N_1^1, \ldots, N_1^{J_i}$, вторая — целочисленными переменными $N_{\mathrm{mw}}^1, \ldots, N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$. Вектор $\underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}}$ ориентирован вдоль диагонали в каждой из этих исходных подрешеток. Поэтому будем далее его называть диагональным вектором исходных подрешеток.

Проецирование каждой их двух исходных прямоугольных целочисленных подрешеток вдоль их диагональных векторов может порождать целочисленные подрешетки только в случае, если в качестве базисных векторов пространств, на которые осуществляется проецирование, выбираются целочисленные векторы проецируемой исходной подрешетки, дополняющие ее диагональный вектор до основного репера подрешетки. В теории решетчатых упаковок [8] под репером целочисленной решетки (подрешетки) понимают базис этой решетки (подрешетки), элементы векторов которого являются взаимно простыми целыми числами. Периодическое смещение репера вдоль его векторов на величину длины этих векторов образует целочисленную решетку (подрешетку).

Продемонстрируем это утверждение на примере проецирования простейшей двумерной прямоугольной целочисленной решетки. На рис. 1 жирными точками показаны двумерные целочисленные решетки и примеры проецирования этих решеток на одномерные S-пространства, задаваемые различными целочисленными векторами, дополняющими диагональные векторы этих решеток до их полного репера. Из примеров проецирования, представленных на рис. 1 видим, что в случае выбора репера S-пространства (в данном простейшем примере это просто целочисленный вектор), дополняющего диагональный вектор до полного репера, задающего всю плоскую решетку, проекции вдоль диагонального вектора всех целочисленных точек этой решетки на S-пространство будут целочисленными.

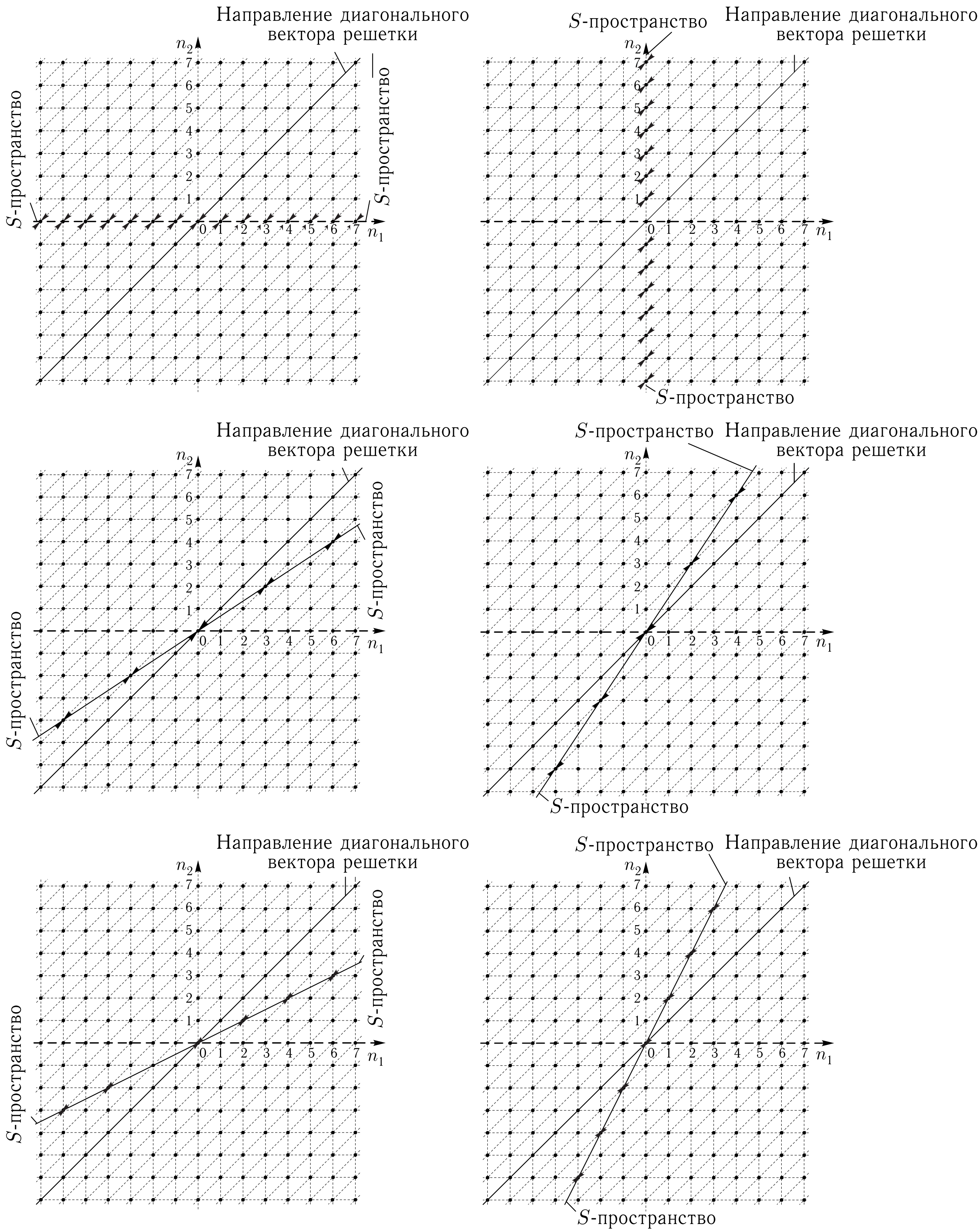

Рис. 1. Примеры проецирования исходной двумерной целочисленной решетки на различные одномерные S-пространства, задаваемые целочисленными векторами, дополняющими ее диагональный вектор до полного репера

Из примеров проецирования, показанных на рис. 1, следует, что в ГНСС-КРК в качестве базисных векторов S-пространства, обладающего нужными свойствами, необходимо выбирать набор целочисленных векторов, дополняющих диагональный вектор исходной проецируемой решетки до ее полного репера. Из того, что существует бесконечно большое множество таких наборов, следует, что существует бесконечно большое множество S-пространств, обладающих нужными свойствами, S-пространства, входящие в это множество, имеют дискретную ориентацию, определяемую наборами целочисленных векторов, дополняющих диагональный вектор исходной проецируемой решетки до ее полного репера.

Диагональный вектор целочисленной подрешетки и дополняющие его до полного репера целочисленные векторы с очевидностью образуют полный репер этой подрешетки. Но все реперы любой решетки (подрешетки) связаны между собой унимодулярными преобразованиями [1]. Поэтому матрицы, вектор-столбцы которых задают S-пространства, сохраняющие целочисленность проекций исходных целочисленных подрешеток, также связаны между собою унимодулярными преобразованиями.

Поскольку целочисленность каждой из двух исходных целочисленных подрешеток при проецировании их вдоль диагонали на любое из S-пространств, входящих в бесконечное множество, сохраняется, то в этом смысле все эти S-пространства являются эквивалентными друг другу. Однако с точки зрения вычислительной устойчивости решения и минимизации вычислительных затрат эти S-пространства не эквивалентны друг другу. Первые два варианта выбора S-пространства, показанные на рис. 1, задаются наиболее короткими базисными векторами (длиной 1), что обеспечивает большую вычислительную устойчивость по сравнению с остальными вариантами выбора S-пространств на рис. 1. Наименьшие вычислительные затраты обеспечивает S-пространство, задаваемое единичной матрицей, из которой удален один произвольный столбец. Проиллюстрируем это утверждение с помощью трехмерной целочисленной решетки, единичные базисные векторы 100, 010, 001 которой показаны на рис. 2.

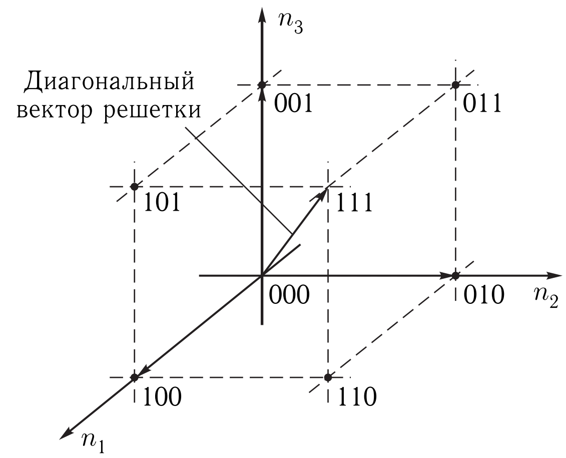

Рис. 2. Ячейка трехмерной целочисленной решетки с базисными векторами 100, 010, 001

В качестве набора векторов, дополняющих диагональный вектор 111 до полного репера трехмерной целочисленной решетки, может служить любая из трех пар целочисленных векторов $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$; $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ и $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$. Видим, что любая из этих пар может быть получена из единичной (3×3)-матрицы вычеркиванием одного из ее столбцов, а в качестве S-пространств, на которые необходимо осуществлять проецирование для сохранения целочисленности проекции трехмерной целочисленной решетки вдоль ее диагонального вектора, можно выбирать любую из плоскостей, задаваемых вышеуказанными парами целочисленных векторов.

Очевидно, что такие же выводы могут быть сделаны и для каждой их двух исходных целочисленных подрешеток произвольной размерности J_i, т. е. качестве S-пространства, сохраняющего целочисленность проекции каждой целочисленной подрешетки произвольной размерности J_i вдоль ее диагонального вектора, может служить любое из подпространств размерности $J_i - 1$, задаваемых столбцами $\left(J_i \times (J_i - 1)\right)$-матрицы, получаемой из единичной $\left(J_i \times J_i\right)$-матрицы отбрасыванием из нее произвольного столбца.

При условии выбора базисных векторов S-пространства для каждой из двух подрешеток указанным образом матрица $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ ранга 2, вектор-столбцы которой ортогональны S-пространству, записывается следующим образом:

$$\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}} = \begin{bmatrix} \underset{4\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{4\times 1}{\mathbf{0}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}^r} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} \\ \underset{J_i\times 1}{\mathbf{0}} & \underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}^r} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}^r}$ — отбрасываемый вектор-столбец из единичной $(J_i \times J_i)$-матрицы. Все элементы вектора $\underset{J_i\times 1}{\mathbf{1}^r}$ равны нулю, за исключением r-го, равного 1. Значение r равно номеру отбрасываемого вектор-столбца единичной матрицы. Поскольку номер отбрасываемого столбца может быть выбран произвольно, то этот номер в работе [1] связывается с номером опорного (*reference*) НКА, в качестве которого обычно используется НКА, наиболее близкий к зениту. Такое решение объясняется тем, что «со-переменные» оцениваемого вектора $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$ (6) являются смещенными на величину элементов вектора $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) исходных переменных, вошедших в базис $S_i^{\perp}$-пространства. Поэтому для уменьшения влияния ошибок измерений, осуществляемых по опорному НКА, в качестве такового выбирается НКА, наиболее близкий к зениту.

Из равенства $\underset{2\times(7+2J_i)}{(\mathbf{S}_i^{\perp})^T} \underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i} = \underset{2\times 1}{\mathbf{0}}$ нижней части расширенной системы уравнений (9) вытекает, что элементы вектора решения $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\widehat{\mathbf{x}}_{s.i}}$ этой системы, стоящие на местах, определяемых положением единиц в вектор-столбцах матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ (10), должны быть равны нулю. Иными словами, элементы вектора новых оцениваемых переменных $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$ (6), расположенные на местах, определяемых положением единиц в вектор-столбцах матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ (10), — нулевые. Но если заранее известно, что два элемента вектора решения $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\widehat{\mathbf{x}}_{s.i}}$ системы (9) являются нулевыми, то оценка остальных элементов вектора решений системы (9) может быть получена путем решения более простой системы линейных уравнений

$$\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{Y}_i} = \underset{3J_i\times(5+2J_i)}{\mathbf{H}_{cmpr.i}} \underset{(5+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{cmpr.i}} + \underset{3J_i\times 1}{\mathbf{\Xi}_i}, \tag{11}$$

где $\underset{3J_i\times(5+2J_i)}{\mathbf{H}_{cmpr.i}}$ — сжатая матрица, получаемая из исходной матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4), в которой отброшены два столбца, соответствующие переменным N_1^r, N_{mw}^r в исходном оцениваемом векторе $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3); $\underset{(5+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{cmpr.i}}$ — сжатый вектор оцениваемых переменных, получаемый из вектора $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$ (6) новых переменных, в котором исключены нули. Таким образом, положение единиц в двух столбцах матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ (10) определяет номера двух отбрасываемых столбцов исходной матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4). При этом не только сохраняется целочисленность линейных комбинаций целочисленных «со-переменных» $N_1^1, \ldots, N_1^{J_i}, N_{\mathrm{mw}}^1, \ldots$ $\ldots, N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$ в оцениваемом векторе $\underset{(5+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{cmpr.i}}$ входящих в вектор $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_i}$ (3) исходных переменных, но и ранг сжатой матрицы $\underset{3J_i\times(5+2J_i)}{\mathbf{H}_{cmpr.i}}$ остается равным рангу $5 + 2J_i$ исходной матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4). Таким образом, ранг сжатой матрицы $\underset{3J_i\times(5+2J_i)}{\mathbf{H}_{cmpr.i}}$ в системе (11) становится равным размерности вектора $\underset{(5+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{cmpr.i}}$ оцениваемых переменных этой системы. Нетрудно увидеть, что в результате решения системы линейных уравнений (11) будут найдены оценки переменных, указанные в векторе $\underset{(7+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{s.i}}$ (6), за исключением нулевых.

Кроме того, указанный выбор S-пространства делает очевидным вид матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$: если S-пространство образовано путем отбрасывания из единичной матрицы одного столбца, то ясно, что вектор, ортогональный выбранному S-пространству, будет иметь вид отброшенного столбца, что дает возможность нахождения матрицы $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ сразу, без необходимости нахождения формального вида базисных векторов S-пространства. При другом произвольном выборе S-пространства вид $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ матрицы неочевиден.

Уменьшение вычислительных затрат на решение системы (11) по сравнению с вычислительными затратами, необходимыми для решения системы (9), лучшая вычислительная устойчивость, а также возможность сразу определить матрицу $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ делают выбор S-пространства, которому соответствует матрица $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ вида (10), предпочтительным по сравнению с выбором других возможных S-пространств.

Вектор ионосферосвободных комбинаций измерений $\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{Y}_i}$ (2), матрица $\underset{3J_i\times(5+2J_i)}{\mathbf{H}_{cmpr.i}}$ и ковариационная матрица $\underset{3J_i\times 3J_i}{\mathbf{R}_i}$ ошибок $\underset{3J_i\times 1}{\boldsymbol{\Xi}_i}$ вектора $\underset{3J_i\times 1}{\mathbf{Y}_i}$ (2), входящих в систему линеаризованных уравнений (11), могут быть вычислены на каждый i-й момент времени. На этой основе можно осуществлять фильтрацию элементов оцениваемого вектора $\underset{(5+2J_i)\times 1}{\mathbf{x}_{cmpr.i}}$ с разрешением неоднозначности целочисленных линейных комбинаций целочисленных «со-переменных» $N_1^1,\ldots,N_1^{J_i},N_{\mathrm{mw}}^1,\ldots$ $\ldots,N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$. К сожалению, ограничения на объем статьи не позволяют авторам рассмотреть здесь алгоритмы этой фильтрации. Мы можем только рекомендовать читателю соответствующую литературу по методам линейного рекуррентного оценивания [9,10] и разрешения неоднозначности целочисленностей псевдофазовых измерений [11,12].

Заключение

Рассмотрено применение теории решетчатых упаковок в пользовательской задаче высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным комбинациям измерений параметров сигналов ГНСС с кодовым разделением каналов.

На основе применения теории решетчатых упаковок в пользовательской задаче высокоточного абсолютного местоопределения по ионосферосвободным комбинациям измерений параметров сигналов ГНСС-КРК показано, что существует бесконечное множество S-пространств, сохраняющих целочисленность проекций двух подрешеток, образуемых исходными целочисленными переменными $N_1^1,\ldots,N_1^{J_i}$, и $N_{\mathrm{mw}}^1,\ldots,N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$ соответственно при их проецировании вдоль ядра $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{V}_i}$ (5) матрицы $\underset{3J_i\times(7+2J_i)}{\mathbf{H}_i}$ (4) на S-пространства. Базисными векторами этих S-пространств являются целочисленные векторы, дополняющие диагональные векторы каждой из подрешеток до их полного репера.

Среди множества S-пространств, сохраняющих целочисленность проекций двух подрешеток, образуемых исходными целочисленными переменными $N_1^1,\ldots,N_1^{J_i}$, и $N_{\mathrm{mw}}^1,\ldots,N_{\mathrm{mw}}^{J_i}$, с точки зрения уменьшения вычислительных затрат, увеличения вычислительной устойчивости и уменьшения влияния ошибок измерений, осуществляемых по опорному НКА (благодаря выбору в качестве опорного НКА, наиболее близкого к зениту), предпочтительным является S-пространство, которому соответствует матрица $\underset{(7+2J_i)\times 2}{\mathbf{S}_i^{\perp}}$ вида (10).

Список литературы

1. *Поваляев А.А.*, *Подкорытов А.Н.*, *Никитин С.А.*, *Филимонова Д.В.* Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2019. Т. 6, вып. 1. С. 4–16.

2. *Подкорытов А.Н.* Высокоточное местоопределение в глобальных навигационных спутниковых системах в абсолютном режиме за счет разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений. Дисс. ... канд. техн. наук. Защищена 30.09.2014, утв. 18.02.2015. М.: МАИ, 2014. 195 с.

3. *Поваляев А.А.*, *Подкорытов А.Н.* Высокоточное местоопределение в глобальных навигационных спутниковых системах в абсолютном режиме за счет разрешения неоднозначности псевдофазовых измерений // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60, №8. С. 813–824.

4. *Povalyaev A.A.*, *Podkorytov A.N.* Precise Point Positioning in GNSS with Ambiguity Resolution of Phase Measurements // Journal of Communication Technology and Electronics. 2015. Vol. 60, No. 8. P. 860–870.

5. *Povalyaev A.A.*, *Podkorytov A.N.* Algebraic Issues of Precise Point Positioning with Ambiguity Resolution in GNSS // Proceedings of the 28th ION GNSS+2015, Tampa, Florida, 14–18 September 2015. P. 2790–2800.

6. *Teunissen P.J.G.* Generalized Inverses, Adjustment The Datum Problem and S-transformations // Reports of the Department of Geodesy Mathematical and Physical Geodesy. Preprint. Delft University of Technology, 1984. 47 p.

7. *de Jonge P.J.* A processing Strategy for the Application of the GPS in Networks // Publications on Geodesy 46. Delft, August 1998. 225 p.

8. *Рышков С.С.*, *Барановский Е.П.* Классические методы теории решетчатых упаковок // Успехи математических наук. 1979. №34, вып. 4 (208). С. 3–64.

9. *Сейдж Э.*, *Мэлс Дж.* Теория оценивания и ее применения в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. проф. Б. А. Левина. Вып. 6. Статистическая теория связи. М.: Связь, 1976. 496 с.

10. *Тихонов В.И.*, *Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Учеб. пособ. для вузов. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.

11. *Вейцель В.А.*, *Архангельский В.А.*, *Волковский А.С. и др.* Радиосистемы и комплексы управления: Учеб. Под ред. В. А. Вейцеля. М.: Вузовская книга, 2016. 574 с.

12. *Поваляев А.А.* Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат. М.: Радиотехника, 2008. 328 с.