

## Уточнение геометрической интерпретации пространственного геометрического фактора в ГНСС

С. И. Ватутин, к. т. н., [vatutin.si@spacecorp.ru](mailto:vatutin.si@spacecorp.ru)

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

А. А. Поваляев, д. т. н., профессор, [povalyaev\\_aa@spacecorp.ru](mailto:povalyaev_aa@spacecorp.ru)

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация  
ФГБОУ «Московский авиационный институт» (национальный исследовательский университет),  
Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** Спутниковая навигация в условиях затенения (город, горы) осуществляется при сужении угла зрения на созвездие навигационных космических аппаратов (НКА), что приводит к снижению числа видимых НКА вплоть до предельно допустимых четырех. В этих условиях становится справедлива полученная сорок лет назад Дж. Спилкером оценка пространственного геометрического фактора как величины, обратной объему пирамиды, вписанной в сферу единичного радиуса вокруг потребителя на концах векторов, направленных от потребителя на четыре НКА, из которых один находится в зените. Объемная аппроксимация Дж. Спилкера очень наглядна, но прямые вычисления показывают, что ее точность существенно снижается при сужении угла зрения на созвездие НКА. В работе осуществлено уточнение объемной интерпретации пространственного геометрического фактора. Уточнение состоит в добавлении к аппроксимирующему объему пирамиды Спилкера объема пирамиды, образуемой векторами от потребителя к трем нижним НКА. Предложенная аппроксимация стремится к точному значению пространственного геометрического фактора при сужении угла зрения на созвездие НКА и дает предельно простую инженерную оценку пространственного геометрического фактора созвездия из четырех НКА: для наземного потребителя геометрический фактор примерно в 2,3 раза больше величины, обратной квадрату синуса половинного угла зрения на созвездие НКА, а при малых углах зрения примерно в 2,3 раза больше величины, обратной квадрату половинного угла зрения в радианах.

**Ключевые слова:** геометрический фактор, навигационный космический аппарат, аппроксимирующий объем, угол зрения

## More Precise Definition of the Geometric Interpretation of Position Dilution of Precision in GNSS

S. I. Vatutin, Cand. Sci. (Engineering), [vatutin.si@spacecorp.ru](mailto:vatutin.si@spacecorp.ru)

Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation

A. A. Povalyaev, Dr. Sci. (Engineering), Prof., [povalyaev\\_aa@spacecorp.ru](mailto:povalyaev_aa@spacecorp.ru)

Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation  
Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russian Federation

**Abstract.** Satellite navigation in shadowing conditions (town, mountains) is realized with a narrowing of the angle of view towards the constellation of navigation spacecraft (NS), which leads to a reduction of the number of visible NS to the minimum allowed number of four. In these conditions, the estimate of the Position Dilution of Precision (derived forty years ago by J. J. Spilker) as an inverse value to the volume of a pyramid inscribed in a unit radius sphere around the user at the end of vectors that are directed from the user to four spacecraft, one of which is in zenith, becomes valid. The J. J. Spilker volumetric approximation is very visual but direct calculations demonstrate that its precision drops significantly when narrowing the angle of view towards the NS constellation. This article contains a more precise Position Dilution of Precision (PDOP) volumetric approximation. Refinement consists in adding the volume of the pyramid formed by the vectors from the user to three lower NS to the approximating volume of the Spilker pyramid. The proposed approximation tends to the exact value of PDOP for a narrowing angle of view towards a NS constellation and gives a maximally simple engineering estimate of PDOP for a constellation of four spacecraft. The PDOP for the ground-based consumer is approximately 2.3 times greater than the inverse value of the square of the sine of the half angle of view towards the NS constellation; and it is 2.3 times greater than the inverse value to the square of half the angle of view in radians at small angles of view.

**Keywords:** Position Dilution of Precision, navigation spacecraft, approximating volume, angle of view

Одной из актуальных задач спутниковой навигации является обеспечение высокой точности местоопределения в горных и городских условиях с углами затенения над горизонтом (УЗГ) до  $40^\circ$ . Затенения приводят к сужению зоны радиовидимости (ЗРВ) созвездия навигационных КА (НКА), а также к уменьшению количества НКА в ЗРВ. Как показано на рис. 1, заимствованном из [1], уже при УЗГ  $26^\circ$  доля времени, когда количество видимых КА ГЛОНАСС уменьшается до четырех, близка к 50%, а значения пространственного геометрического фактора (ПГФ) на этих интервалах резко возрастают до десятков, сотен и более. В то же время появление в ЗРВ потребителя пятого НКА резко снижает значение ПГФ до «хороших» значений 2,5–3.

По определению [2–4] ПГФ, или коэффициент геометрии пространственный  $K_{гп}$ , является отношением среднеквадратической ошибки определения координат потребителя  $\sigma_{п}$  к среднеквадратической ошибке измерения псевдодальностей  $\sigma_{пд}$ :

$$K_{гп} = \sigma_{п} / \sigma_{пд}. \quad (1)$$

Из (1) видно, что чем меньше  $K_{гп}$ , тем точнее определяются координаты потребителя при той же точности измерения псевдодальностей.

ПГФ  $K_{гп}$  вычисляется по формуле [5]:

$$K_{гп} = \sqrt{D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}}, \quad (2)$$

где  $D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}$  — первые три диагональных элемента квадратной четырехмерной ковариационной матрицы  $D$ :

$$D = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} & D_{xb} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} & D_{yb} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} & D_{zb} \\ D_{bx} & D_{by} & D_{bz} & D_{bb} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

которая, в свою очередь, вычисляется на основе градиентной матрицы координат навигационных спутников  $H$  по формуле [2]:

$$D = (G^T \cdot G)^{-1}, \quad (4)$$

где градиентная матрица  $G$  вычисляется по формуле [2]:

$$G = \begin{vmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\beta_1) & \cos(\gamma_1) & 1 \\ \cos(\alpha_2) & \cos(\beta_2) & \cos(\gamma_2) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_N) & \cos(\beta_N) & \cos(\gamma_N) & 1 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  — углы линии визирования «потребитель —  $i$ -й НКА» относительно осей системы координат  $x, y, z$ .  $N$  — количество видимых потребителем НКА. Направляющие косинусы определяются соотношениями

$$\cos(\alpha_i) = \frac{x_{п} - x_i}{R_{i,п}}, \quad (6)$$

$$\cos(\beta_i) = \frac{y_{п} - y_i}{R_{i,п}}, \quad (7)$$

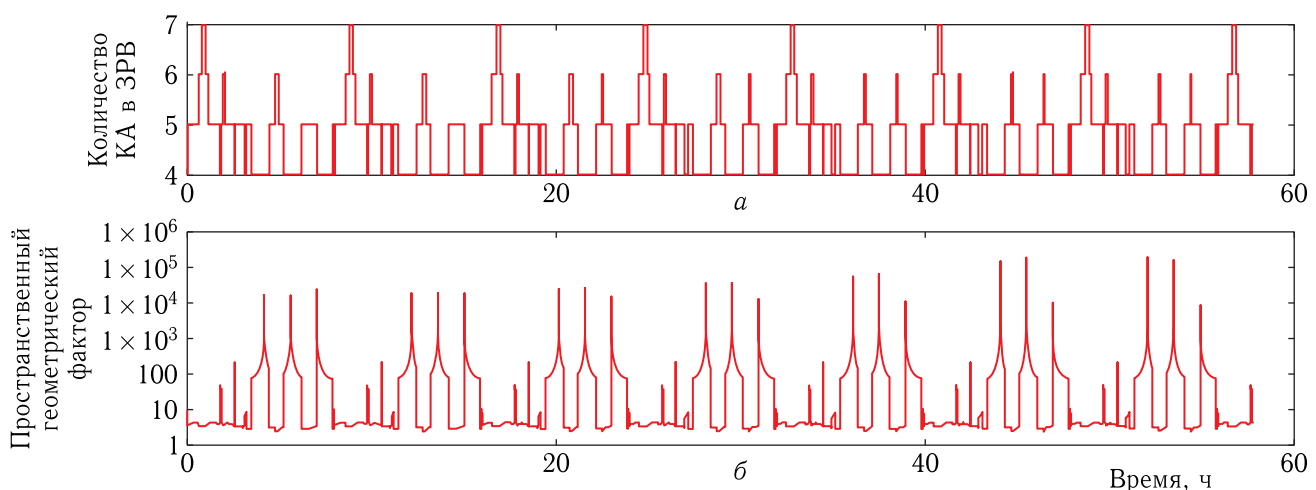


Рис. 1. Количество КА ГЛОНАСС, видимых потребителю в Барнауле ( $50^\circ$  с. ш.,  $83^\circ$  в. д.) при УЗГ  $26^\circ$  (а) и ПГФ (б) как функции времени

$$\cos(\gamma_i) = \frac{z_n - z_i}{R_{i,n}}, \quad (8)$$

$$R_{i,n} = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2}. \quad (9)$$

Здесь  $x_i, y_i, z_i$  — координаты  $i$ -го НКА,  $x_n, y_n, z_n$  — координаты потребителя.

Алгоритм вычисления ПГФ, задаваемый выражениями (2)–(9), никак не поясняет причину резкого возрастания ПГФ при уменьшении количества видимых НКА до четырех. Однако это можно сделать с помощью простой и наглядной геометрической интерпретации, которую дал Дж. Спилкер в работе [6] для потребителя, находящегося на поверхности Земли рис. 2, а, и в работе [7] для потребителя, находящегося над поверхностью Земли рис. 2, б. В этих работах Дж. Спилкер утверждает, что для четырех навигационных космических аппаратов, находящихся в зоне радиовидимости потребителя, из которых один находится в зените, ПГФ обратно пропорционален объему треугольной пирамиды, вершинами которой являются концы четырех единичных векторов, исходящих от потребителя в направлении на НКА (рис. 2). Будем называть такую пирамиду пирамидой Спилкера.

В работе [7] Дж. Спилкер обосновывает свое утверждение с помощью выражения для полного

геометрического фактора для четырех НКА, которое в наших обозначениях для ПГФ  $K_{гп}$  имеет вид:

$$K_{гп} = \frac{1}{|G|} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 g_{ij}^2}, \quad (10)$$

где  $g_{ij}$  — алгебраические дополнения элементов матрицы  $G^{-1}$ , обратной к матрице  $G$  (5),  $g_{ij}/|G|$  — элементы обратной матрицы  $G^{-1}$ . По утверждению Спилкера, числитель формулы (10) много меньше зависит от геометрии, чем определитель  $|G|$ . Опираясь на это утверждение Дж. Спилкера, можно сделать вывод о том, что ПГФ  $K_{гп}$  обратно пропорционален определителю матрицы  $G$  (5).

Нетрудно показать, что при нахождении одного из НКА в зените над потребителем определитель  $|G|$  равен объему параллелепипеда, построенного на единичных векторах, ориентированных от верхней вершины пирамиды Спилкера к трем ее нижним вершинам. При этом объем этого параллелепипеда в шесть раз больше объема пирамиды. Из этой геометрической интерпретации определителя Дж. Спилкер делает простой и геометрически понятный вывод: ПГФ прямо пропорционален величине, обратной объему пирамиды Спилкера,

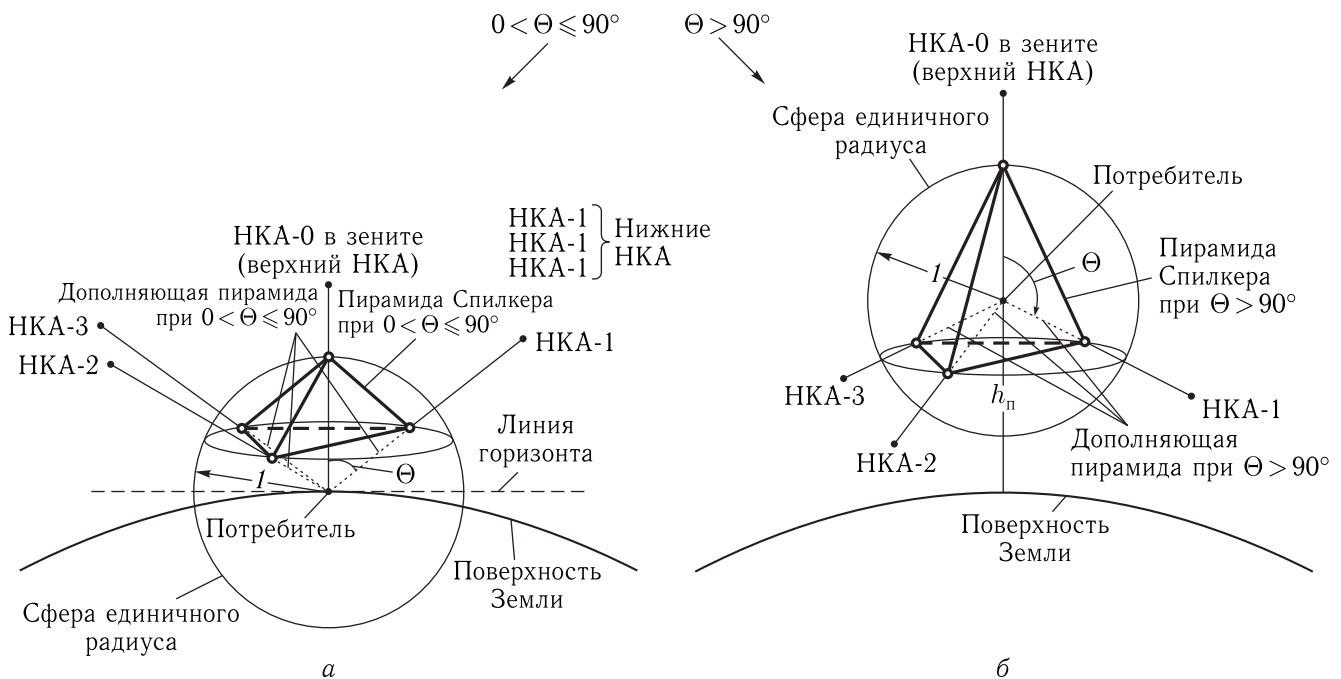


Рис. 2. Пирамида Спилкера при  $0 < \theta \leq 90^\circ$  (а) и  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  (б)

или, иными словами, чем больше объем пирамиды, тем меньше ПГФ и тем выше точность местоопределения потребителя. При этом в работах Спилкера [6, 7] не приводится никаких сведений о коэффициенте указанной пропорциональности, что затрудняет использование результатов работ Спилкера для практических приложений.

Для более глубокого понимания причины резкого возрастания ПГФ рассмотрим положение точек, определяющих положение вершин пирамиды Спилкера на единичной сфере и, следовательно, задающих ее объем. Положение этих точек будем рассматривать в топоцентрической системе координат с началом в точке расположения потребителя на поверхности Земли, осью  $X$ , направленной в плоскости горизонта на восток, осью  $Y$ , направленной в той же плоскости на север, и осью  $Z$ , направленной по местной вертикали. На рис. 3 и 4 показано положение рассматриваемых точек в топоцентрической системе для моментов времени до и после резкого возрастания  $K_{гп}$  от 2,8 до 75 на левом фронте зубца, выделенного пунктиром на нижнем графике рис. 1, б, в середине этого зубца с практически бесконечным  $K_{гп} = 15576$  (рис. 5), до и после резкого уменьшения  $K_{гп}$  от 141 до 3 на правом фронте указанного зубца (рис. 6 и 7).

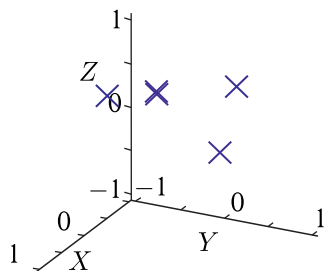


Рис. 3. Пять НКА в ЗРВ (два близких),  $K_{гп} = 2,8$

Из анализа рис. 4–6 видим, что орбитальное построение ГЛОНАСС таково, что в начале и в конце интервала времени с четырьмя НКА в ЗРВ вершины пирамиды, соответствующие этим НКА, находятся почти в одной плоскости и поэтому пирамида с такими вершинами имеет очень малый объем. В середине интервала времени с четырьмя НКА в ЗРВ (рис. 5) наступает момент, когда объем пирамиды становится нулевым, а ПГФ устремляется в бесконечность. Как только в ЗРВ

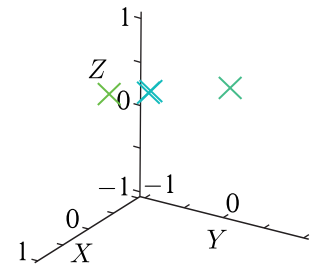


Рис. 4. Четыре НКА в поле зрения (два близких),  $K_{гп} = 75$

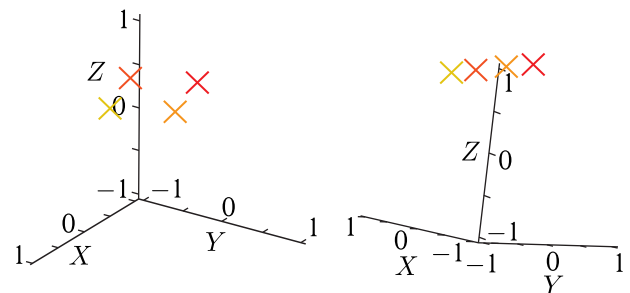


Рис. 5. Четыре рассредоточенных НКА в одной плоскости,  $K_{гп} = 15576$

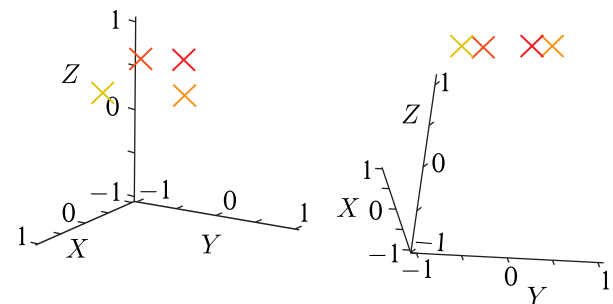


Рис. 6. Четыре рассредоточенных НКА почти в одной плоскости (перед правым фронтом зубца),  $K_{гп} = 141$

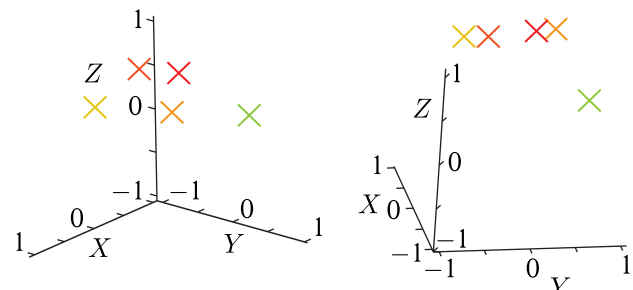


Рис. 7. Пять НКА в поле зрения (после правого фронта зубца),  $K_{гп} = 3$

появляется пятый НКА, четыре точки из пяти на поверхности единичной сферы образуют пирамиду, объем которой заметно отличается от нуля (рис. 3 и 7), что приводит к резкому падению ПГФ.

Интерпретация ПГФ с помощью объема пирамиды Спилкера наглядно поясняет причину его резкого возрастания при сужении ЗРВ. Неудивительно, что в силу простоты и наглядности этой интерпретации она «кочует» из одной работы по спутниковой навигации в другую и, в частности, упоминается в фундаментальной монографии [2].

Вместе с тем прямые вычисления по строгим формулам (2)–(9) показывают, что столь удобная для наглядных представлений обратная пропорциональность ПГФ объему пирамиды Спилкера нарушается тем больше, чем уже становится ЗРВ.

Для выяснения причин этого найдем строгое аналитическое выражение для ПГФ созвездия из четырех НКА, порождающих идеальную пирамиду Спилкера, с максимальным объемом и такое же выражение для объема этой пирамиды. В основании идеальной пирамиды Спилкера лежит равносторонний треугольник, а ее вершина расположена строго над потребителем.

Для поиска указанных аналитических выражений этого обратимся к рис. 8, где показаны гео-

метрические соотношения для вычисления элементов градиентной матрицы и объема идеальной пирамиды Спилкера как функции половинного угла зрения  $\Theta$  при  $0 < \Theta \leq 90^\circ$  (рис. 8, а) и  $\Theta > 90^\circ$  (рис. 8, б). На этом рисунке  $H$  — высота орбит НКА,  $d$  на рис. 1,  $a$  — высота над Землей плоскости расположения трех нижних НКА,  $g$  на рис. 2, б — расстояние от точки расположения потребителя до плоскости трех нижних НКА. На обоих рисунках нижние НКА разнесены в плоскости их расположения по окружности на  $120^\circ$ .  $R$  — радиус Земли,  $E$  — угол возвышения (elevation) нижних НКА над горизонтом,  $R_{\text{ЗНКА}}$  — радиус окружности, вырезанной плоскостью трех нижних НКА на сфере радиусом  $R + H$ ,  $R_{\text{нд}}$  — дальность от точки нахождения потребителя до каждого нижнего НКА.

Нетрудно показать, что в ранее введенной топосферической системе координат  $XYZ$  с началом в точке расположения потребителя на поверхности Земли НКА-0, находящийся в зените относительно потребителя, имеет координаты  $(0, 0, H)$ ; НКА-1 в плоскости трех нижних НКА, располагающийся по направлению оси  $X$ , имеет координаты  $(R_{\text{ЗНКА}}, 0, d(-g))$ ; НКА-2 и НКА-3, находящиеся в плоскости трех нижних НКА под углом  $120^\circ$  в разные стороны от НКА-1, имеют координаты

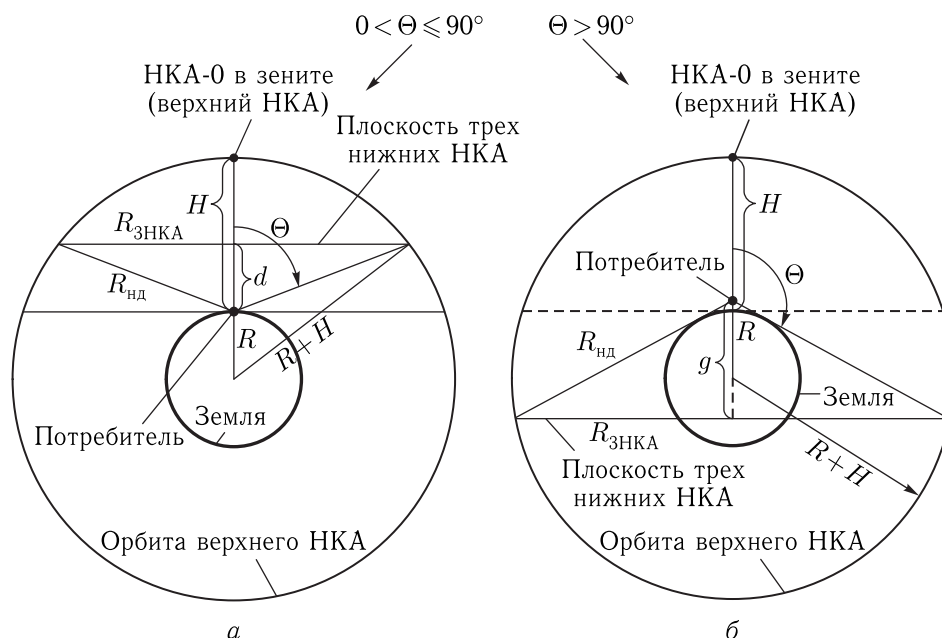


Рис. 8. Геометрические соотношения для вычисления элементов градиентной матрицы и объема идеальной пирамиды Спилкера при  $0 < \Theta \leq 90^\circ$  (а) и  $\Theta > 90^\circ$  (б)

$(-R_{\text{ЗНКА}} \cdot \cos(60^\circ), -R_{\text{ЗНКА}} \cdot \cos(30^\circ), d(-g))$  и  $(R_{\text{ЗНКА}} \cdot \cos(60^\circ), R_{\text{ЗНКА}} \cdot \cos(30^\circ), d(-g))$  соответственно. Отсюда в соответствии с рис. 8 получаем выражения для направляющих косинусов НКА-0–НКА-4 как функции половинного угла зрения  $\Theta$ :

$$\cos(\alpha_0) = 0; \quad \cos(\beta_0) = 0; \quad \cos(\gamma_0) = 1, \quad (11)$$

$$\cos(\alpha_1) = \sin(\Theta); \quad \cos(\beta_1) = 0; \\ \cos(\gamma_1) = \cos(\Theta), \quad (12)$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{-\sin(\Theta)}{2}; \quad \cos(\beta_2) = \frac{-\sin(\Theta)\sqrt{3}}{2}; \\ \cos(\gamma_2) = \cos(\Theta), \quad (13)$$

$$\cos(\alpha_3) = \frac{-\sin(\Theta)}{2}; \quad \cos(\beta_3) = \frac{\sin(\Theta) \cdot \sqrt{3}}{2}; \\ \cos(\gamma_3) = \cos(\Theta). \quad (14)$$

Из (2)–(9), (11)–(14) для рассматриваемого идеального созвездия НКА, порождающего идеальную пирамиду Спилкера, опираясь на [8], получаем следующее простое выражение для вычисления ПГФ как функции угла  $\Theta$  ( $E = 90^\circ - \Theta$ ), которое справедливо для обоих случаев  $0 < \Theta \leq 90^\circ$  и  $\Theta > 90^\circ$ :

$$K_{\text{гп}} = \sqrt{\frac{8}{3(1 - \cos \Theta)^2(1 + \cos \Theta)}} = \\ = \sqrt{\frac{8}{3(1 - \sin E)^2(1 + \sin E)}}. \quad (15)$$

Оптимальное значение угла  $\Theta$ , при котором достигается минимальное значение ПГФ, несложно найти, приравняв производную (15) нулю и используя [9, 10]. В результате получим квадратное уравнение

$$3 \cos^2 \Theta - 2 \cos \Theta - 1 = 0, \quad (16)$$

решение которого дает два корня:  $\cos \Theta = 1$ , т. е. половинный угол зрения  $\Theta = 0$ , при котором в соответствии с (14) ПГФ обращается в бесконечность (экстремум типа максимум), и  $\cos \Theta_{\text{opt}} = -1/3$ , при котором оптимальный половинный угол зрения  $\Theta_{\text{opt}} = 109,47^\circ$  ( $E = -19,47^\circ$ ). Подстановка  $\cos \Theta = -1/3$  в (14) дает минимальное значение ПГФ  $K_{\text{гп min}} = 3/2 = 1,5$ .

Скалярное произведение единичного вектора, ориентированного от потребителя на зенитный

НКА, с направляющими косинусами (10), и любого из единичных векторов, ориентированных от потребителя на нижние НКА, с направляющими косинусами (12)–(14), равно косинусу угла между этими векторами, т. е. равно  $\cos \Theta$ . Вычисление скалярного произведения двух любых векторов, ориентированных на нижние НКА, с направляющими косинусами (12)–(14) при изменении угла  $\Theta$  во всем диапазоне  $0 < \Theta < 180^\circ$ , дает следующее выражение для косинуса угла  $\alpha$  между ними:  $\cos \alpha = (3 \cos^2 \Theta - 1)/2$ .

При  $\cos \Theta = -1/3$   $\cos \alpha = -1/3$ , т. е. угол  $\alpha$  между двумя любыми векторами, ориентированными от потребителя в сторону нижних НКА при  $\Theta = \Theta_{\text{opt}} = 109,47^\circ$  также равен  $109,47^\circ$ . Таким образом, при  $\Theta = \Theta_{\text{opt}} = 109,47^\circ$ , при котором достигается минимально возможное значение ПГФ, равное 1,5, потребитель находится в геометрическом центре правильного тетраэдра с равными гранями.

Нетрудно показать, что объем идеальной пирамиды Спилкера для обоих случаев  $0 < \Theta \leq 90^\circ$  и  $\Theta > 90^\circ$  определяется выражением

$$V_{\text{пс}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sin \Theta)^2 (1 - \cos \Theta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\cos E)^2 (1 - \sin E). \quad (17)$$

Из (15) и (17) получаем формулу для отношения идеального ПГФ к величине, обратной объему идеальной пирамиды Спилкера:

$$\frac{K_{\text{гп}}}{V_{\text{пс}}} = K_{\text{гп}} V_{\text{пс}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \Theta)^2 (1 - \cos \Theta)}{2}} \\ = \sqrt{\frac{(1 - \sin E)^2 (1 - \sin E)}{2}}. \quad (18)$$

График отношения (18) во всем диапазоне  $0^\circ < \Theta < 180^\circ$  изменения половинного угла зрения  $\Theta$  ( $90^\circ > E > -90^\circ$ ), показанный на рис. 9, имеет ярко выраженный максимум, поиск которого путем дифференцирования (18) опять приводит к решению квадратного уравнения (16) и значению  $\cos \Theta_{\text{opt}} = -1/3$ . Приравняв производную от объема пирамиды Спилкера нулю, снова получим  $\cos \Theta_{\text{opt}} = -1/3$  для максимального объема пирамиды.

Таким образом, минимум ПГФ соответствует максимуму объема пирамиды Спилкера и максимуму отношения ПГФ к величине, обратной объему

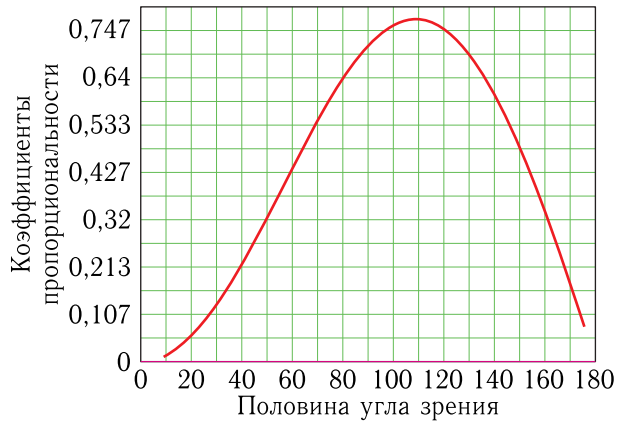


Рис. 9. Отношение ПГФ к величине, обратной объему пирамиды Спилкера, при изменении половинного угла зрения  $\Theta$  в диапазоне от  $1^\circ$  до  $179^\circ$

пирамиды Спилкера, при значении косинуса  $\cos \Theta_{\text{opt}} = -1/3$ .

Из графика рис. 9 видно, что отношение ПГФ к величине, обратной объему пирамиды Спилкера во всем диапазоне  $0 < \Theta < 180^\circ$ , достигает максимального значения  $\sim 0,77$  вблизи  $\Theta_{\text{opt}} = 109,47$  и быстро уменьшается при отклонении половинного угла зрения  $\Theta$  от  $\Theta_{\text{opt}}$ . Это означает, что величина, обратная объему идеальной пирамиды Спилкера, при отклонении половинного угла зрения  $\Theta$  от  $\Theta_{\text{opt}} = 109,47$  растет существенно быстрее, чем идеальный ПГФ. То есть предположение Спилкера о малой чувствительности числителя в общей формуле для ПГФ (10) к геометрии созвездия НКА не соответствует действительности. Коэффициент пропорциональности ПГФ и величины, обратной объему пирамиды Спилкера, сильно зависит от угла зрения на созвездие НКА. Поэтому использование величины, обратной к объему пирамиды Спилкера, для имеющих практический интерес инженерных оценок ПГФ при значительных отклонениях угла зрения  $\Theta$  от оптимальных значений будет давать большие ошибки.

Для устранения этого недостатка необходимо увеличить аппроксимирующий объем, обратная величина которого используется в качестве оценки ПГФ. Это можно сделать за счет расширения объема пирамиды Спилкера объемом дополняющей пирамиды, показанной на рис. 2, а и 2, б. Вершина этой пирамиды располагается в точке расположения потребителя, то есть в центре единичной

сферы, а треугольное основание совпадает с основанием пирамиды Спилкера. Ребра дополняющей пирамиды показаны на рис. 2, а и 2, б пунктирными линиями.

В соответствии с рис. 2, а дополняющая пирамида при  $0 < \Theta \leq 90^\circ$  имеет высоту

$$h_{d1} = \cos \Theta. \quad (19)$$

Отсюда имеем выражение для вычисления объема  $V_{d1}$  дополняющей пирамиды при  $0 < \Theta \leq 90^\circ$ :

$$\begin{aligned} V_{d1} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin^2 \Theta \cdot \cos \Theta = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cos^2 E \cdot \sin E. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (17) и (20) получаем простое для инженерных оценок выражение для суммарного объема  $V_{\Sigma 1} = V_{\text{nc}} + V_{d1}$  пирамиды Спилкера и дополняющей пирамиды при  $0 < \Theta \leq 90^\circ$ :

$$V_{\Sigma 1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin^2 \Theta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cos^2 E. \quad (21)$$

В соответствии с рис. 2, б дополняющая пирамида при  $\Theta > 90^\circ$  ( $E > 0^\circ$ ) имеет высоту

$$h_{d2} = -\cos \Theta. \quad (22)$$

Отсюда имеем выражение для вычисления объема  $V_{d2}$  дополняющей пирамиды, соответствующей случаю  $\Theta > 90^\circ$  ( $E > 0^\circ$ ):

$$\begin{aligned} V_{d2} &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sin \Theta)^2 \cdot \cos \Theta = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\cos E)^2 \cdot \sin E. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (17) и (23) получаем простое выражение для суммарного объема  $V_{\Sigma 2} = V_{\text{nc}} + V_{d2}$  пирамиды Спилкера и дополняющей пирамиды при  $\Theta > 90^\circ$  ( $E < 0^\circ$ ):

$$\begin{aligned} V_{\Sigma 2} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sin \Theta)^2 (1 - 2 \cos \Theta) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\cos E)^2 (1 - 2 \sin E). \end{aligned} \quad (24)$$

Выражения (21) и (24) для суммарных объемов  $V_{\Sigma 1}$  и  $V_{\Sigma 2}$  могут быть представлены с помощью единого выражения

$$V_{\Sigma} = V_{\text{пс}} + V_{\text{доп}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sin \Theta)^2 (1 - \cos \Theta + |\cos \Theta|) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\cos E)^2 (1 - \sin E + |\sin E|). \quad (25)$$

Графики зависимостей ПГФ и величин, обратных объему пирамиды Спилкера ( $1/V_{\text{пс}}$ ) и обратных суммарному объему ( $1/V_{\Sigma}$ ) как функции половинного угла зрения  $\Theta$ , представлены в логарифмическом масштабе на рис. 10. Из этих графиков видно, что величины, обратные объемам, аппроксимируют ПГФ, причем аппроксимация на основе суммарного объема существенно точнее аппроксимации на основе пирамиды Спилкера вплоть до половинного угла зрения порядка  $150^\circ$  (до угла возвышения  $E = -60^\circ$ ).

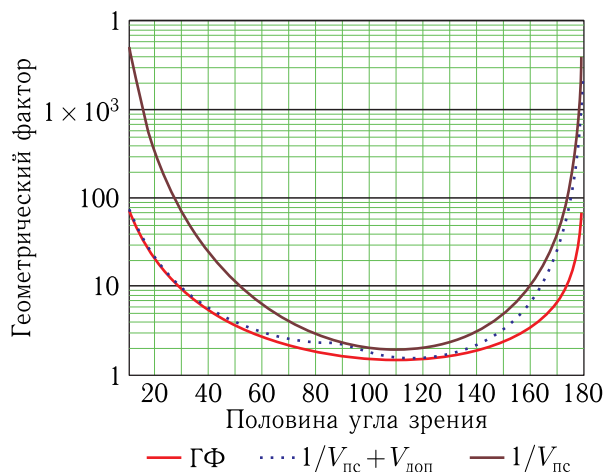


Рис. 10. Зависимость ПГФ и величин, обратных объему пирамиды Спилкера и суммарному объему  $V_{\Sigma}$ , от половинного угла зрения  $\Theta$

На рис. 11 показаны графики зависимостей от половинного угла зрения  $\Theta$  отношений ПГФ к величинам, обратным объему пирамиды Спилкера и суммарному объему  $V_{\Sigma}$ .

Как видно из рис. 11, отношение ПГФ к величине, обратной суммарному объему  $V_{\Sigma}$ , существенно ближе к единице, чем к величине, обратной объему пирамиды Спилкера, во всем диапазоне  $0 < \Theta < 180^\circ$  изменения половинного угла зрения  $\Theta$ ,

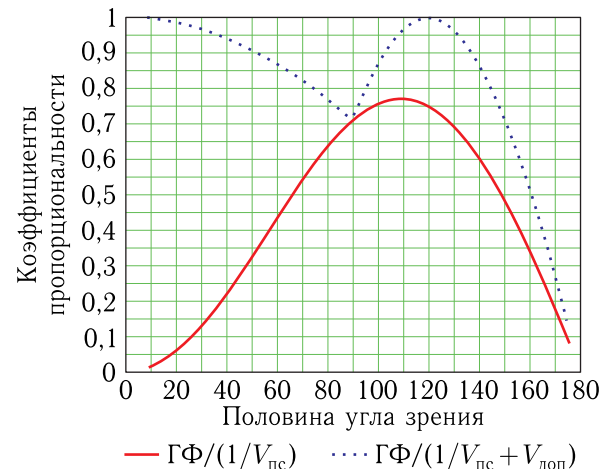


Рис. 11. Зависимость отношения ПГФ к величинам, обратным объему пирамиды Спилкера и суммарному объему  $V_{\Sigma}$ , от половинного угла зрения  $\Theta$

причем при половинном угле зрения в  $120^\circ$  величина, обратная аппроксимирующему объему  $V_{\Sigma}$ , дает абсолютно точное значение ПГФ. С другой стороны, при стремлении половинного угла зрения к  $0^\circ$  величина, обратная аппроксимирующему объему  $V_{\Sigma}$ , также стремится к точному значению ПГФ. В соответствии с (21) получаем простейшую инженерную оценку геометрического фактора созвездия из четырех НКА. При углах зрения  $\Theta \leq 90^\circ$  геометрический фактор примерно в 2,3 раза больше величины, обратной квадрату синуса половинного угла зрения, а при малых углах зрения, где  $\sin \Theta \approx \Theta$ , примерно в 2,3 раза больше величины, обратной квадрату половинного угла зрения в радианах.

Отметим, что половинные углы зрения (углы возвышения  $E < 0^\circ$ ) могут быть обеспечены только для потребителя, поднятого над поверхностью Земли. Используя рис. 12, нетрудно показать, что минимальная высота потребителя над поверхностью Земли, при которой нижние НКА созвездия видны потребителю под оптимальным углом зрения  $\Theta_{\text{опт}} = 109,47$ , определяется выражением

$$h_{\text{оптmin}} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \Theta_{\text{опт}})} - R = \frac{6371}{\sin(180^\circ - 109,47^\circ)} - 6371 = 386,5 \text{ км.} \quad (26)$$

Таким образом, Международная космическая станция, летающая на высотах порядка 400 км,



потенциально имеет оптимальные условия местоопределения по четырем НКА ГНСС с ПГФ, близким к 1,5. При этом отношение (18) ПГФ (15) к величине, обратной объему идеальной пирамиды Спилкера (17), составляет 0,77, а к величине, обратной к суммарному объему (25), составляет 0,962. Это еще раз свидетельствует о лучшей аппроксимации ПГФ суммарным объемом  $V_{\Sigma}$  (25).

Следует, однако, отметить, что современные ГНСС ориентированы главным образом на наземного потребителя. Использование спутниковой навигации на борту КА-потребителей существенно ограничивается шириной диаграммы направленности антенны, излучающей навигационные сигналы. Так, в НКА системы ГЛОНАСС ширина диаграммы передающей антенны составляет  $38^\circ$  [5]. Поэтому, как следует из рис. 12, гарантированное применение ГНСС ГЛОНАСС возможно только до максимальных высот нахождения КА-потребителя порядка

$$h_{\text{нм}} = (R + H) \sin(19^\circ) - R = 1921,5 \text{ км.} \quad (27)$$

Для КА-потребителей, летающих выше  $h_{\text{нм}} = 1921,5$  км, навигационное поле ГЛОНАСС имеет разрывы. При этом максимальная высота КА-по-

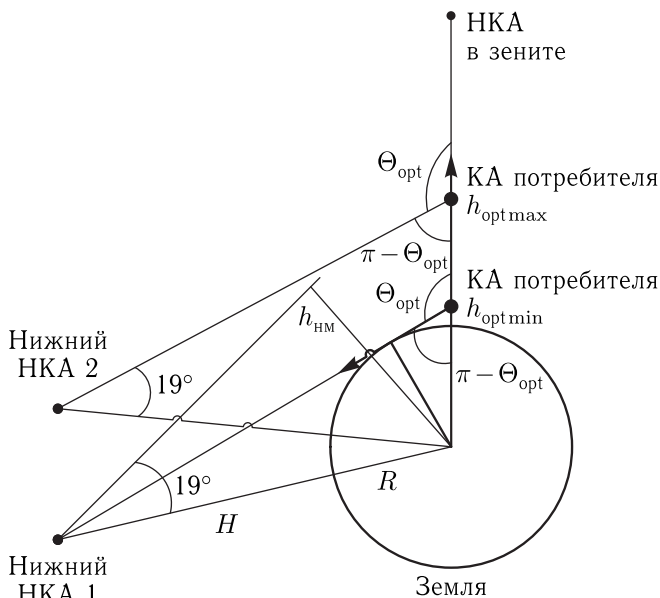


Рис. 12. К оценке минимальной и максимальной высоты НКА потребителя при работе по идеальному созвездию

требителя, который может иногда работать с созвездиями НКА, близкими к идеальному, составляет

$$h_{\text{max}} = \frac{(R + H) \sin(19^\circ)}{\sin(180^\circ - \Theta_{\text{opt}})} - R = 2424,7 \text{ км.} \quad (28)$$

## Заключение

Проведено уточнение результатов работ Дж. Спилкера по геометрической аппроксимации ПГФ с помощью суммы объемов двух треугольных пирамид. Вершинами первой пирамиды являются концы четырех единичных векторов, исходящих от потребителя в направлении на четыре НКА созвездия. Один из этих НКА находится в зените над потребителем, три остальных НКА равномерно распределены в общей плоскости, параллельной плоскости местного горизонта и располагающейся ниже зенитного НКА. Эта пирамида была введена в работах Спилкера. Вторая дополнительная пирамида, введенная в данной статье, имеет те же вершины, что и первая пирамида, за исключением вершины, соответствующей зенитному спутнику. Во второй пирамиде эта вершина находится в точке расположения потребителя.

Показано, что величина, обратная суммарному объему первой и второй пирамид, с существенно лучшей для практических приложений точностью аппроксимирует ПГФ по сравнению с предложенной Спилкером величиной, обратной только объему первой пирамиды. Причем коэффициент пропорциональности между ПГФ и величиной обратной к суммарному объему первой и второй пирамид стремится к 1 при приближении половинного угла зрения  $\Theta$  к  $0^\circ$  и  $120^\circ$ , тогда как коэффициент пропорциональности для приближения Спилкера при сужении угла зрения к  $0^\circ$  стремится к нулю.

Предложенная в данной работе аппроксимация дает предельно простую инженерную оценку геометрического фактора созвездия из четырех НКА. При  $\Theta \leq 90^\circ$  геометрический фактор примерно в 2,3 раза больше величины, обратной квадрату синуса половинного угла зрения, а при малых углах зрения, где  $\sin \Theta \approx \Theta$ , — примерно в 2,3 раза больше величины, обратной квадрату половинного угла зрения в радианах.

## Список литературы

1. *Ватутин С.И.* Оценка геометрического фактора для наземного потребителя системы ГЛОНАСС с высокоэллиптическим дополнением // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2016, т. 3, вып. 3. С. 12–28.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. Изд. 3-е, перераб. М.: Радиотехника, 2005. 688 с.
3. Радиосистемы и комплексы управления / Под ред. В. А. Вейцеля. М.: Вузовская книга, 2016. 572 с.
4. *Мальшев В.В., Куришин В.В., Ревнивых С.Г.* Введение в спутниковую навигацию. М.: МАИ-ПРИНТ, 2008. 188 с.
5. *Мальшев В.В., Куришин В.В.* Спутниковые навигационные системы: Электронный учебник (курс лекций) для обучения специалистов в области спутниковой навигации / Московский авиационный институт (Государственный технический университет), кафедра 604 «Системный анализ и управление». М., 2005.
6. *Spilker J.J.* GPS Signal Structure and Performance Characteristics. Navigation // Journal of Institute of navigation, 1978, vol. 25, N 2. P. 121–146.
7. Global Positioning System: Theory and Applications / Edited by Parkinson B.W. and Spilker J.J. Progress in astronautics and aeronautics. Vol. 163. Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 370 L'Enfant Promenade, SW, Washington, DC 20024-2518, 1996.
8. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 720 с.
9. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1964. 608 с.
10. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 3 т. М.: Дрофа, 2003–2006. Т. 1–3.