РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
2019, том 6, выпуск 3, с. 33–41

УДК 681.513.8 DOI 10.30894/issn2409-0239.2019.6.3.33.41

Проблемы синтеза адаптивных фильтров методами генетических алгоритмов

В. М. Ватутин, *д.т.н., профессор, vatutin_vm@spacecorp.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
С. А. Донцов, *sad_rks@mail.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
А. В. Воля, *к.т.н., contact@spacecorp.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
В. О. Гусев, *sl.goosev@gmail.com*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация
И. А. Негляд, *contact@spacecorp.ru*
Министерство обороны Российской Федерации, г. Москва

Аннотация. При решении задачи излучения устойчивых сигналов, имеющих постоянный спектральный состав, требуется синтезировать уравнение соответствующей модели сигнала. Для синтеза предлагается использовать одну из разновидностей генетических алгоритмов — метод группового учета аргументов (МГУА). Фактически синтезированное этим методом уравнение является оптимальным фильтром — частным представлением разложения в ряд Лотки–Вольтерры. Получение результата разложения — результат работы генетического алгоритма. Проблемами при синтезе оптимального фильтра являются правило разделения данных, правило генерации моделей-претендентов, метод получения коэффициентов модели и форма квадратичного критерия отбора модели.

В статье приводятся алгоритмы для решения перечисленных проблем, реализованные на языке C++ и работающие под управлением ОС МСВС. Особый интерес представляет модифицированный алгоритм Зейделя для определения коэффициентов оптимальной модели, способный работать с плохо определенными матрицами, имеющими значение определителя близким или равным нулю.

Ключевые слова: синтез оптимального фильтра, метод группового учета аргументов, системы линейных уравнений, генетический алгоритм

РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
2019, том 6, выпуск 3, с. 33–41

Problems of Synthesis of Adaptive Filters by Genetic Algorithms Methods

V. M. Vatutin, *Dr. Sci. (Engineering), Prof., vatutin_vm@spacecorp.ru*
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation
S. A. Dontsov, *sad_rks@mail.ru*
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation
A. V. Volya, *contact@spacecorp.ru*
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation
V. O. Gusev, *sl.goosev@gmail.com*
Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation
I. A. Neglyad, *contact@spacecorp.ru*
Ministry of Defense of the Russian Federation, Moscow

Abstract. When solving the problem of emission of stable signals with a constant spectral composition, it is necessary to synthesize the equation of the corresponding signal model. For synthesis, it is proposed to use one of the varieties of genetic algorithms — the method of group accounting of arguments (MGAA). In fact, the equation synthesized by this method is an optimal filter — a particular representation of the Lotka–Volterra series expansion. Obtaining the result of decomposition is the result of the work of the genetic algorithm. Problems in the synthesis of the optimal filter are the data separation rule, the rule for generating candidate models, the method of obtaining model coefficients and the form of the quadratic model selection criterion.

The article provides algorithms for solving these problems, implemented in C++ and running under the MSWS operating system. Of particular interest is the modified Seidel algorithm for determining the coefficients of the optimal model, capable of working with poorly defined matrices having a determinant value close to or equal to zero.

Keywords: synthesis of an optimal filter, method of group accounting of arguments, systems of linear equations, genetic algorithm

Метод группового учета аргументов

Метод группового учета аргументов (GMDH — Group Method of Data Handling) — это семейство индуктивных алгоритмов для математического моделирования мультипараметрических данных. Метод основан на рекурсивном селективном отборе моделей, на основе которых могут строиться более сложные модели.

Автор метода — академик АН СССР, академик Национальной академии наук Украины (НАНУ), директор Института кибернетики им. В. М. Глушкова Алексей Григорьевич Ивахненко (30.03.1913–16.10.2007).

Метод группового учета аргументов применяется в самых различных областях науки и техники для анализа данных и отыскания закономерностей для прогнозирования и моделирования систем, решения задач оптимизации и распознавания образов [1]. Индуктивные алгоритмы МГУА дают уникальную возможность автоматически синтезировать взаимозависимости, выбрать оптимальную структуру модели или сети и увеличить точность существующих алгоритмов моделирования и аппроксимаций.

Этот подход самоорганизации моделей принципиально отличается от обычно используемых дедуктивных методов. Он основан на индуктивных принципах [2] — нахождение лучшего решения перебором огромного числа уравнений — претендентов с выбором лучшего из них по специальному критерию.

Метод группового учета аргументов состоит из нескольких алгоритмов для решения разных задач. В него входят как параметрические алгоритмы, так и алгоритмы кластеризации, комплексирования аналогов и вероятностные алгоритмы. Этот подход к самоорганизации уравнений основан на переборе постепенно усложняющихся моделей и выборе наилучшего решения согласно минимуму внешнего критерия, в общем случае квадратичного.

В качестве базисных моделей могут использоваться не только алгебраические полиномы, но и разностные, дробно-рациональные, нелинейные и вероятностные функции.

На рис. 1 приведен обобщенный алгоритм синтеза оптимального фильтра по критерию совпадения спектров.

Начало его работы происходит в блоке *1*. В блоке *2* происходит получение вычислителем измеренных экспериментальных данных. В блоке *3* — нормализация данных (приведение их в диапазон от 0 до 1). Затем, если в блоке *4* принято решение о сохранении данных, происходит переход к блоку *5*, в котором производится запись в базу данных. После чего управление передается блоку *8*. Блок *8* производит синтез обучающей и тестовой (проверочной) выборки. В это время в блоке *6* производится вычисление спектральных компонент наблюдаемого сигнала, а затем в блоке *7* происходит формирование контрольного спектра, используемого при вычислении значения внешнего критерия. Затем в блоке *9* происходит генерация модели (вычисляются ее коэффициенты с использованием данных из обучающей выборки). После этого в блоке *10* происходит вычисление внешнего спектрального критерия. В блоке *11* выполняется запоминание коэффициентов модели и значения вычисленного внешнего критерия. В блоке *12* происходит контроль окончания процесса генерации моделей — претендентов на оптимальную модель фильтра. Если процесс генерации моделей завершен, то происходит переход к блоку *13*. В нем происходит поиск модели с минимальным значением внешнего квадратичного критерия. По завершению поиска в блоке *14* синтезируется оптимальное уравнение фильтра. После этого происходит останов процесса моделирования. Но при необходимости процесс может быть зациклен и тогда используется переход к началу вычислений (блок *2*) от блока *15*, иначе в блоке *16* выполняется останов.

Анализ входных данных

Отсчеты моделируемого сигнала поступают с выхода приемного устройства. В итоге на вход программы поступает вектор значений, взятых с определенной частотой дискретизации [3]. Количество измерений может варьироваться в очень широких пределах.

Для того чтобы все данные находились в одном диапазоне изменения значений, необходимо произвести нормализацию. Это поможет легко сопоставлять полученные значения и получать хорошую обусловленность матриц, предназначенных

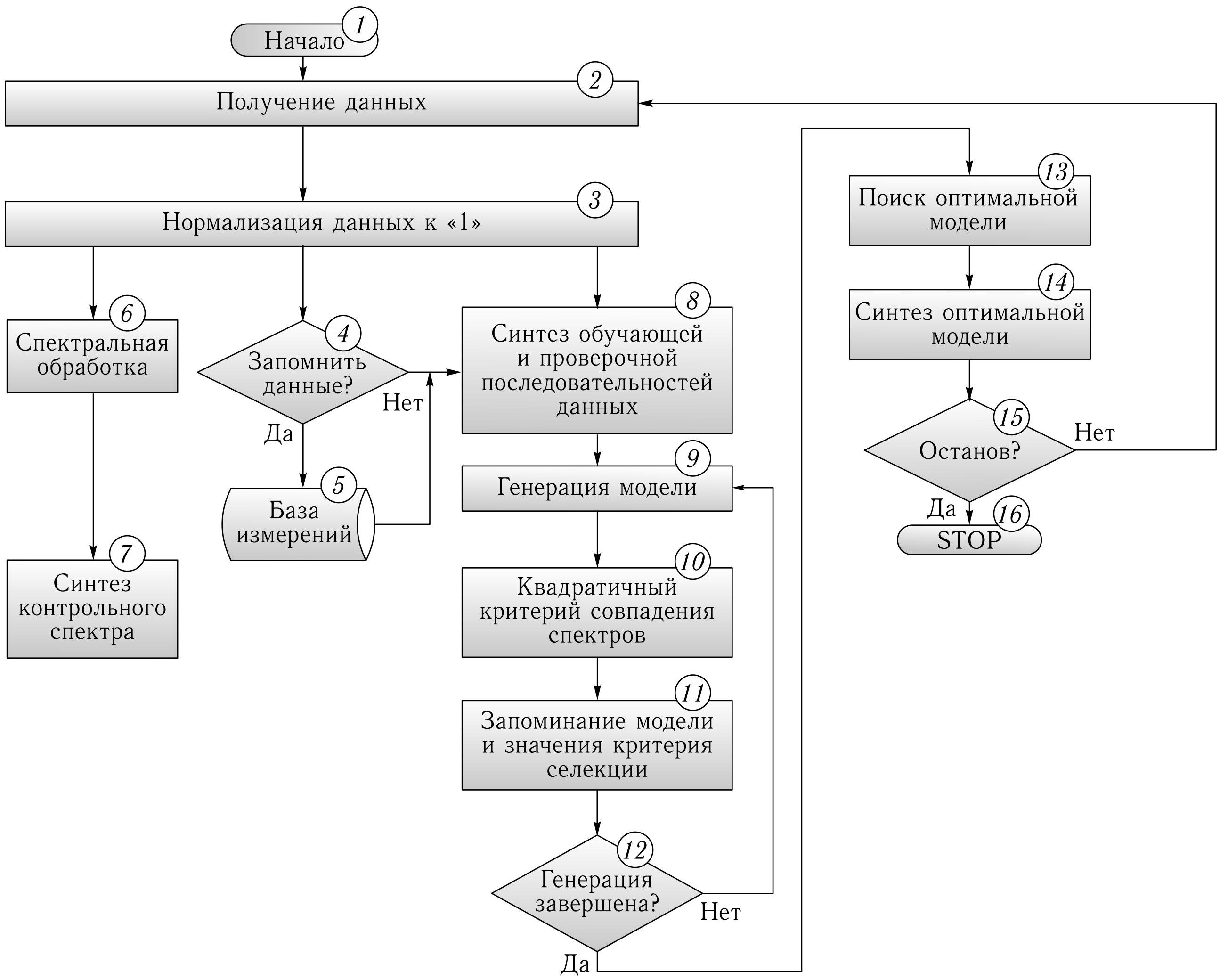

Рис. 1. Схема алгоритма синтеза модели

для получения коэффициентов моделирующего уравнения.

Из ряда входных отсчетов получаем систему уравнений. Для этого выберем уравнение линии регрессии [4] в виде линейной разностной схемы, представимой в следующем виде:

$$y_N = a_0 + a_1x_1 + a_1x_2 + a_1x_3 + \ldots + a_Nx_N = \\ = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_ix_i.$$

Здесь N — число членов линейного разностного уравнения (интервал корреляции со значением выходного сигнала модели y_N,) а x — измеренное значение сигнала, отстоящее по времени на i шагов назад от текущего (N-го) значения уровня сигнала.

Для каждой точки q [5] экспериментальных данных можно подсчитать величину квадрата отклонения (ошибки):

$$\delta^2 = (q - q_0^2).$$

Суммируя уравнения такого вида для всех N экспериментальных точек, получим выражение для средней квадратической ошибки

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{N} \delta_t^2.$$

Для вычисления минимума среднеквадратической ошибки находим выражение для частных производных (по числу определяемых коэффициентов уравнения регрессии) и приравниваем их к нулю

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_0} = 0, \ \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_1} = 0, \ \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_2} = 0, \ \ldots .$$

Отсюда получим систему так называемых условных уравнений Гаусса.

Разделение данных на обучающую и проверочную выборки

Основной критерий требует разбиения выборки минимум на две равные части — обучающую (*training sample*) и проверочную (*validation sample*) [6]. Обычно таблица исходных данных делится на три части: проверочную, обучающую и экзаменационную (*test sample*), что повышает точность моделирования, но увеличивает время вычислений. Поэтому в данном случае ограничимся только двумя выборками обучающей и проверочной. Обучающая выборка используется для получения оценок параметров модели (например, коэффициентов регрессии), а проверочная — для оценки качества модели как претендента на оптимальное решение.

Обучающая выборка — выборка, по которой производится настройка (определение значений параметров) модели искомой зависимости. Можно также говорить о синтезе структуры оптимального фильтра. В данном случае — линейно-разностного.

Если модель зависимости построена по обучающей выборке, то оценка качества этой модели, сделанная по той же выборке, оказывается, как правило, неустойчивой, то есть становящейся неточной при малых изменениях данных [7]. Это нежелательное явление называют переобучением. На практике оно встречается очень часто. Хорошую эмпирическую оценку качества построенной модели дает ее проверка на независимых данных, которые не использовались для обучения.

Тестовая (или проверочная) выборка — это выборка, по которой оценивается качество построенной модели. Качество получаемой модели оценивается по величине специального квадратичного критерия, вычисленного для этой выборки.

Оценку качества, сделанную по тестовой выборке, можно применить для выбора наилучшей по качеству модели. Однако тогда полученная оценка снова окажется смещенной. Для получения несмещенной оценки выбранной модели часто приходится выделять третью выборку и т. д. Этот эффект связан с известной теоремой Гёделя о неполноте.

Будем называть несмещенной называется оценку [8], математическое ожидание которой рано оцениваемому параметру.

Таким образом, тестовая (проверочная) выборка — это выборка, по которой осуществляется выбор наилучшей модели из множества моделей, построенных по обучающей выборке.

Метод Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений

Для генерации уравнений-претендентов необходимо решать системы линейных уравнений. Для этого можно воспользоваться методом Зейделя. Преимущество метода заключается в способности обрабатывать разреженные матрицы — матрицы с преимущественно нулевыми элементами. Такие матрицы носят название плохо определенных, то есть для них трудно вычислить детерминант, а следовательно, и найти точное решение системы линейных уравнений.

Метод Зейделя является классическим [9] итерационным методом решения системы линейных уравнений.

В виде исходных данных задачи имеем систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Чтобы пояснить суть метода, перепишем задачу в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{(n-1)1}x_1 + a_{(n-1)2}x_2 + \ldots + a_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)} = \\ \qquad\qquad\qquad = -a_{(n-1)n}x_n + b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n(n-1)}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Здесь в j-м уравнении мы перенесли в правую часть все члены, содержащие x_i, для $i > j$. Эта запись может быть представлена:

$$(L + D)\mathbf{x} = -U\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

где в принятых обозначениях D означает матрицу, у которой на главной диагонали стоят соответствующие элементы матрицы A, а все остальные нули; тогда как матрицы U и L содержат верхнюю и нижнюю треугольные части A, на главной диагонали которых нули.

Итерационный процесс в методе Зейделя состоится по формуле

$$(L + D)\mathbf{x}^{(k+1)} = -U\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

После выбора соответствующего начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$.

Метод Зейделя можно рассматривать как модификацию метода Якоби. Основная идея модификации состоит в том, что новые значения $\mathbf{x}^{(i)}$ используются здесь сразу же по мере получения, в то время как в методе Якоби они не используются до следующей итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_2^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + \\ \qquad\qquad + c_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)} + d_n, \end{cases}$$

где $c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i, \\ 0, & j = i, \end{cases}$ $d_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}},\ i = 1, ..., n.$

Таким образом, i-я компонента $(k+1)$-го приближения вычисляется по формуле

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij}x_j^{(k)} + d_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Условия окончания итерационного процесса Зейделя при достижении точности ε в упрощенной форме имеет вид:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Более точное условие окончания итерационного процесса имеет вид:

$$\left\| Ax^{(k+1)} - b \right\| \leqslant \varepsilon$$

и требует больше вычислений. Благодаря критерию окончания итерационного процесса алгоритм решения систем линейных уравнений хорошо подходит для разреженных матриц, так как при их решении систем с такими матрицами часто происходит «деление на ноль», что приводит к остановке вычислительного процесса.

Генерация моделей-претендентов

Целью МГУА является получение модели в результате перебора моделей из индуктивно-порождаемого множества. Параметры каждой модели настраиваются так, чтобы доставить минимум выбранному внешнему критерию. Различают два основных вида алгоритмов — комбинаторный и многорядный.

Все алгоритмы МГУА воспроизводят схему массовой селекции: последовательно порождаются модели возрастающей сложности. В комбинаторном виде происходит генерация моделей путем полного перебора моделей из некоторого, достаточно большого множества. Каждая модель настраивается: методом наименьших квадратов находятся значения параметров. Из моделей претендентов выбираются лучшие в соответствии с выбранным критерием.

Многорядные алгоритмы могут вычислять остатки регрессионных моделей после каждого ряда селекции или не вычислять; при этом используются исходные данные.

В случае многорядных алгоритмов каждая полиномиальная модель однозначно определяется [10] набором индексов s входящих в него мономов (одночленов):

$$y = a_0 + w(s)a(s).$$

Элементы вектора w — коэффициенты при мономе полинома; элементы вектора a — результат произведения свободных переменных соответствующих мономов. Индексы $s \in \{1, \ldots, F_0\}$ есть индексы мономов, входящих в модель. Другими словами, производная модель

$$y = a_0 + w(s)a(s)$$

порождается набором индексов $s \in \{1, \ldots, F_0\}$, включающих соответствующие элементы векторов

$$w = \left\langle w_1, \ldots, w_{F_0} \right\rangle \text{ и } a = \left\langle a_1, \ldots, a_{F_0} \right\rangle.$$

При ограничении полинома числом R число мономов полинома равно

$$F_0 = \sum_{r=1}^{R} \overline{C}_r^P = \sum_{r=1}^{R} \frac{(r+p-1)!}{P!(r-1)!}.$$

А число моделей первого ряда соответственно равно 2^{F0}. Здесь $\overline{C}_r^P$ — число сочетаний с повторениями из P по r, P — число свободных переменных — элементов вектора x.

Модели претенденты порождаются индуктивно. При этом вводится ограничение на длину полинома базовой модели. Например, степень полинома базовой модели не должно превышать заданное число R. Тогда базовая модель представима в виде линейной комбинации заданного числа F_0 произведений свободных переменных:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, \ldots, x_m^R).$$

Здесь f — линейная комбинация. Аргументы этой функции переобозначаются следующим образом:

$$x_1 \to a_1, x_2 \to a_2, \ldots, x_1^2 \to a_\alpha,$$
$$x_1x_2 \to a_\beta, x_2^2 \to a_\gamma, \ldots, x_m^q \to a_{F_0}.$$

То есть

$$y = f(a_1, 1_2, \ldots, a_{F_0}).$$

Для линейно входящих коэффициентов задается одноиндексная нумерация

$$w = \left\langle w_1, \ldots, w_{F_0} \right\rangle.$$

Тогда модель может быть представлена в виде линейной комбинации:

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^{F_0} w_i a_i.$$

Каждая порождаемая модель задается линейной комбинацией элементов $\{(w_i, a_i)\}$, в которой множество индексов $\{i\} = s$ является подмножеством $\{1, \ldots, F_0\}$.

Определение и выбор критерия

Вычисление показателя качества (оптимальности) уравнения на проверочной выборке осуществляется с помощью внешнего критерия.

Критерий выбора модели может быть назван внешним, если он получен в соответствии с теоремой Гёделя о неполноте [11], с помощью дополнительной информации, не содержащейся в данных, которые использовались при вычислении параметров моделей. Очевидно, что такая информация содержится в тестовой (проверочной) выборке.

Алгоритм МГУА использует и внутренний и внешний критерии. Внутренний критерий используется для настройки параметров модели (метод наименьших квадратов), внешний — для выбора модели оптимальной структуры. Таких внешних критериев может быть сконструировано несколько, при этом возможен выбор модели одновременно по нескольким внешним критериям (аддитивный комбинированный внешний критерий).

В данной работе приводится всего один внешний критерий. Его значения вычисляются как численное соответствие спектра сигнала, полученного из обучающей выборки (рис. 2), и спектра, полученного из тестовой выборки (рис. 3).

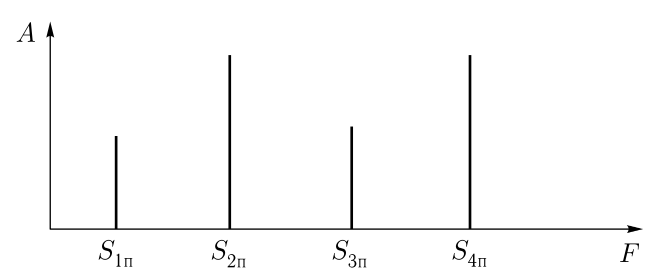

Рис. 2. Спектр сигнала на обучающей выборке

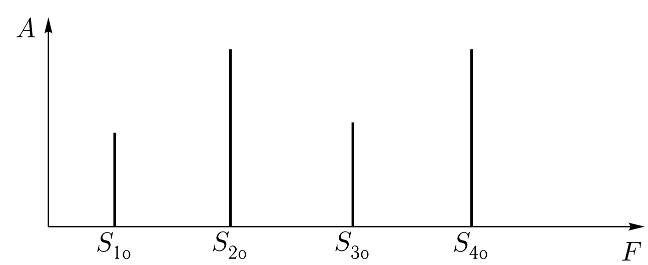

Рис. 3. Спектр сигнала на проверочной выборке

Модель — претендент будет определена тем правильнее, чем меньше будет вычисленное значение внешнего критерия:

$$\mathrm{Cr} = \min\left(\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{k=1}^{N}(S_{k\text{п}} - S_{k\text{о}})^2}\right).$$

Правильней всего выбирать не один внешний критерий, а несколько. Возьмем в качестве дополнительного критерия критерий регулярности.

Критерий регулярности $\Delta^2(C)$ включает среднеквадратичную ошибку на тестовой подвыборке C, полученную при параметрах модели, настроенных на обучающей подвыборке l:

$$\Delta^2(\widetilde{N}) = \left|y_C - A_C\widehat{w}_l\right|^2 = (y_C - A_C\widehat{w}_l)^\top(y_C - A_C\widehat{w}_l),$$

где A — система линейных уравнений, полученная из обучающей выборки:

$$\widehat{y}_C(l) = A_C\widehat{w}_l.$$

Для того чтобы учитывать результаты вычислений нескольких критериев, необходимо использовать комбинированный критерий.

Комбинированный критерий:

$$k^2 = \sum_{i=1}^{K} a_i k_i^2$$

при условии нормировки

$$k^2 = \sum_{i=1}^{K} a_i \frac{k_i^2}{k_{i\max}^2} \sum_{i=1}^{K} a_i = 1.$$

Здесь k_i — принятые на рассмотрение критерии, а a_i — веса этих критериев, назначенные в начале вычислительного эксперимента.

В оценке оптимальности модели фильтра используются также нормализованные значения критериев. При этом предыдущая формула имеет вид

$$k^2 = \sum_{i=1}^{K} a_i \frac{k_i^2}{k_{i\max}^2}.$$

После того как все зависимости y_i, $i = \overline{1,p}$ идентифицированы, по внешнему критерию из них отбирают лучшую, которую можно использовать в качестве оптимального фильтра, выделяющего скрытую под шумами закономерность.

Заключение

Описанный в статье алгоритм может работать в режиме реального времени для синтеза оптимального фильтра.

Важным применением такого рода программы и результатов ее работы служит ее использование в приемных радиотрактах в том случае, когда структура сигнала неизвестна, а сам сигнал подвергнут воздействию помех. Такая ситуация часто возникает в том случае, когда принимаются сигналы, предназначенные для оптимальных условий приема. Что особенно важно, так это то, что вскрытие структуры оптимального фильтра возможно даже при очень высоком уровне помех.

Применение итерационного метода Зейделя, несмотря на то, что он не является строго детерминированным, позволяет получать оценки параметров оптимальных фильтров быстро и точно, причем даже в условиях плохо обусловленных матриц условных уравнений Гаусса. Модификация итерационного алгоритма позволила избежать возникновения переполнения разрядной сетки моделирующего компьютера, что приводит к аварийным остановам его работы.

Для ускорения работы по синтезу оптимального фильтра генерация моделей может происходить параллельно. Это вполне допустимо, так как получение оценок по внешнему критерию может осуществляться для каждой из структур независимо.

Применение критерия сравнения спектров, позволяет использовать стандартные системы аппаратной поддержки вычислений, в том числе устройства [12] выполнения БПФ.

Преимущество внешнего спектрального критерия перед классическими каноническими квадратичными критериями, требующими большие объемы алгебраических вычислений, позволяет использовать этот метод в высокочастотных областях передачи радиосигналов.

Список литературы

1. Современные технологии радиомониторинга в спутниковых системах связи и ретрансляции: Монография / Ред. А. В. Кузовников. М.: Радиотехника, 2015. 216 с.

2. *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. Киев: Наук. думка, 1981. 296 с.

3. *Рабинер Л.*, *Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. А.Л.Зайцева, Э.Г.Назаренко, Н.Н.Тетекина / Под ред Ю.Н.Александрова. М.: Мир, 1978. 848 с.

4. *Коршунов Ю.М.* Математические основы кибернетики: Учеб. пособ. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1980. 424 с.

5. *Фадеев Д.К.*, *Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. 855 с.

6. *Ивахненко А.Г.*, *Юрачковский Ю.П.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. М., Радио и связь, 1987. 120 с. (Кибернетика).

7. *Ивахненко А.Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. Киев: Техніка, 1975. 310 с.

8. *Ивахненко А.Г.*, *Степашко В.С.* Помехоустойчивость моделирования. Киев: Наук. думка, 1985. 216 с.

9. *Дьяконов В.П.* Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 240 с.

10. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 272 с.

11. *Нагель Э.*, *Ньюмен Дж.Р.* Теорема Гёделя. М.: Красанд, 2010. 121 с.

12. *Бугров В.Н.*, *Ивлев Д.Н.*, *Шкелёв Е.И.* Цифровая обработка сигналов с применением цифровых сигнальных процессоров. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. 84 с.