

Определение временных корректирующих поправок для высокоточного абсолютного местоопределения по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов

А. А. Поваляев, *д. т. н., профессор, rovalyaev_aa@spacecorp.ru*

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

*ФГБОУ «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»,
Москва, Российская Федерация*

А. Н. Подкорытов, *к. т. н., rovalyaev_aa@spacecorp.ru*

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

*ФГБОУ «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»,
Москва, Российская Федерация*

С. А. Никитин, *rovalyaev_aa@spacecorp.ru*

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

Д. В. Филимонова, *filimonova.dv@spacecorp.ru*

АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются алгебраические основы решения так называемой сетевой задачи определения высокоточных временных корректирующих поправок по измерениям, осуществляемым сетью наземных станций по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов. Указанные поправки доставляются в навигационную аппаратуру потребителя по каналам связи и используются в ней для решения пользовательской задачи определения координат потребителя с ошибками, обычно не превышающими 1 см. Определение высокоточных корректирующих поправок осуществляется с разрешением неоднозначности целочисленностей псевдофазовых измерений, что приводит к значительному повышению точности оценивания поправок и, как следствие, резко сокращает время, необходимое для достижения сантиметровой точности местоопределения в пользовательской задаче. Алгебраические основы решения пользовательской задачи с разрешением целочисленностей псевдофазовых измерений по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов были рассмотрены в ранее опубликованной работе авторов [1].

Ключевые слова: высокоточные абсолютные местоопределения, ВАМО, разрешение целочисленностей псевдофазовых измерений, действительное и целочисленное ВАМО

Determination of Clock Corrections for Precise Point Positioning with GNSS CDMA Signals

A. A. Povalyaev, *Dr. Sci. (Engineering), Prof., povalyaev_aa@spacecorp.ru*

*Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation
Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russian Federation*

A. N. Podkorytov, *Cand. Sci. (Engineering), povalyaev_aa@spacecorp.ru*

*Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation
Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russian Federation*

S. A. Nikitin, *povalyaev_aa@spacecorp.ru*

Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation

D. V. Filimonova, *filimonova.dv@spacecorp.ru*

Joint Stock Company "Russian Space Systems", Moscow, Russian Federation

Abstract. Algebraic principles for computation of precise satellite clock corrections based on measurements from a ground network of GNSS CDMA signals (network solution) are considered in the paper. The precise satellite clock corrections are transmitted into the user receiver and applied to get the user coordinates with the errors usually not exceeding 1 cm. Ambiguity resolution of carrier phase measurements is used to get such precise satellite clock corrections; it leads to a considerable increase in positioning accuracy and a significant reduction of convergence time for user solution. Algebraic principles for precise point positioning with ambiguity resolution (user solution) were considered in a previous paper of the authors [1].

Keywords: precise point positioning, PPP, ambiguity resolution, float PPP, integer PPP

Введение

Основные понятия и терминология, используемые в данной статье, введены авторами в ранее опубликованной работе [1]. Укажем здесь только то, что в сетевой задаче так же, как и в пользовательской, основной проблемой обработки измерений является преодоление недостатка ранга системы линейных уравнений, получаемых путем линеаризации нелинейных математических моделей измерений псевдодальностей и псевдофаз с сохранением целочисленности псевдофазовых неоднозначностей. Сохранение этой целочисленности позволяет разрешать ее неоднозначность, что приводит к значительному повышению точности оценивания поправок и, как следствие, к резкому сокращению времени, необходимому для достижения сантиметровой точности местоопределения в пользовательской задаче.

Математические модели измерений псевдодальностей и псевдофаз в задачах целочисленного ВАМО на ионосферосвободных частотах ГНСС с кодовым разделением каналов

Математические модели измерений псевдодальностей $\rho_{ifr,i}^j$, псевдофаз $L_{ifr,i}^j$ и комбинаций Мельбурна–Вуббена mw_i^j в задачах целочисленного ВАМО на ионосферосвободных частотах ГНСС с кодовым разделением каналов (ГНСС–КРК), которые обеспечивают такую же вероятность правильного разрешения неоднозначности псевдофазовых целочисленностей, как и модели на исходных частотах, были рассмотрены в ранее опубликованной работе авторов [1] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_{ifr,i}^j &= R_i^j + w_i^j \Delta D_i + dT_{\rho,ifr,i} - dt_{\rho,ifr,i}^j + \xi_{\rho,ifr,i}^j, \\ L_{ifr,i}^j &= R_i^j + w_i^j \Delta D_i + dT_{L,ifr,i} - dt_{L,ifr,i}^j - \\ &\quad - \lambda_{\Delta nifr} N1^j - \lambda_{n_2 ifr} N_{mw}^j + \xi_{L,ifr,i}^j, \\ mw_i^j &= b_{mw} - b_{mw}^j - \lambda_{mw} N_{mw}^j + \xi_{mw,i}^j, \\ j &= \overline{1, J_i}. \end{aligned} \quad (1)$$

Смысловое содержание обозначений переменных и коэффициентов, входящих в (1), описано в [1].

Решение сетевой задачи

В описании решения сетевой задачи используются следующие обозначения: J_i — количество НКА в ГНСС–КРК, одновременно видимых всей сетью наземных станций в i -й момент времени; M — количество станций наземной сети; $J_{m,i}$ — количество НКА, видимых m -й станцией наземной сети $m = \overline{1, M}$ в i -й момент времени. В табл. 1, заимствованной из [2] и сокращенной нами для компактности, представлен пример видимости НКА GPS станциями наземной сети.

Видимым НКА соответствует 1, невидимым — 0. Смысл индексов при единицах и затенения некоторых единиц станет ясен далее. Для сценария, представленного в табл. 1, которую мы будем называть матрицей сценария, в i -й момент времени $M = 7$, $J_i = 12$, $J_{m,i}$ — равно количеству единиц в строках матрицы сценария, т. е. количеству НКА, видимых каждой m -й станцией наземной сети в i -й момент времени; $J_{\Sigma,i} = \sum_{m=1}^M J_{m,i}$ (для сценария, представленного в табл. 1, $J_{\Sigma,i} = 32$).

Целью решения сетевой задачи является оценивание смещений показаний ионосферосвободных кодовых $dt_{\rho,ifr,i}^j$, фазовых $dt_{L,ifr,i}^j$ часов и задержки b_{mw}^j Мельбурна–Вуббена $j = \overline{1, J_{m,i}}$ в аппаратуре всех J_i НКА, наблюдаемых всей сетью наземных станций по измерениям, осуществляемым одновременно всеми M станциями наземной сети. При этом координаты станций и координаты всех J_i НКА, по которым проводятся измерения, предполагаются известными с высокой точностью. Это позволяет систему нелинейных уравнений (1) для ионосферосвободных измерений, осуществляемых m -й станцией сети $m = \overline{1, M}$, представить в сетевой задаче в следующем линеаризованном виде (вместо нижнего индекса ifr , который опущен, используется индекс m номера станции):

$$\begin{aligned} \Delta \rho_{m,i}^j &= w_{m,i}^j \Delta D_{m,i} + dT_{\rho,m,i} - dt_{\rho,i}^j + \xi_{\rho,m,i}^j, \\ \Delta L_{m,i}^j &= w_{m,i}^j \Delta D_{m,i} + dT_{L,m,i} - dt_{L,i}^j - \\ &\quad - \lambda_{\Delta nifr} N1_m^j - \lambda_{n_2 ifr} N_{mw,m}^j + \xi_{L,m,i}^j, \end{aligned}$$

Таблица 1. Видимость НКА станциями сети: 1 — НКА виден, 0 — НКА не виден

	m	Номера НКА системы GPS, видимые всей сетью наземных станций											$J_{m,i}$	
		1	2	3	10	16	17	21	22	23	26	27		31
		Номера НКА в порядке расположения их в едином массиве												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Станции наземной сети	1	0	0	1 _{1,1}	0	0	1 ₂	1 ₃	0	1 ₄	1 _{5,2}	0	0	5
	2	1 _{6,3}	0	1 ₇	0	0	1 _{8,4}	1 _{9,5}	0	1 ₁₀	0	0	0	5
	3	1 ₁₁	0	1 ₁₂	0	0	1 ₁₃	1 _{14,6}	0	1 _{15,7}	0	0	0	5
	4	0	0	0	0	1 _{16,8}	0	0	1 _{17,9}	0	0	0	1 _{18,10}	3
	5	0	1 _{19,11}	0	1 _{20,12}	0	0	0	0	0	1 _{21,13}	1 ₂₂	0	4
	6	0	0	1 ₂₃	0	0	1 ₂₄	1 _{25,14}	0	1 ₂₆	1 _{27,15}	1 _{28,16}	1 _{29,17}	7
	7	0	1 ₃₀	0	1 ₃₁	1 _{32,18}	0	0	0	0	0	0	0	3

$$\Delta t w_{m,i}^j = b_{mw,m} - b_{mw}^j - \lambda_{mw} N_{mw,m}^j + \xi_{mw,m,i}^j, \quad (2)$$

$$m = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, J_{m,i}}$$

где $\Delta \rho_{m,i}^j = \rho_{m,i}^j - R_{m,i}^j$, $\Delta L_{m,i}^j = L_{m,i}^j - R_{m,i}^j$, $\Delta t w_{m,i}^j = t w_{m,i}^j$ — невязки ионосферосвободных комбинаций псевдодальностей $\rho_{m,i}^j$, псевдофаз $L_{m,i}^j$ и Мельбурна–Вуббена $t w_{m,i}^j$, сформированных по измерениям, осуществляемым m -й станцией; $R_{m,i}^j$ — расстояние между m -й станцией $m = \overline{1, M}$ и j -м НКА $j = \overline{1, J_{m,i}}$.

Система линейаризованных уравнений (2) для сетевой задачи может быть переписана в следующем матричном виде:

$$\mathbf{Y}_{net,i} = \mathbf{H}_{net,i} \cdot \mathbf{x}_{net,i} + \mathbf{\Xi}_{net,i}, \quad (3)$$

$$3J_{\Sigma,i} \times 1 \quad 3J_{\Sigma,i} \times nx_i \quad nx_i \times 1 \quad 3J_{\Sigma,i} \times 1$$

где $\mathbf{Y}_{net,i} = \left[(\Delta \rho_i)^T \quad (\Delta L_i)^T \quad (\Delta m w_i)^T \right]^T$ — вектор наблюдаемых параметров, в котором

$$\Delta \rho_i = \left[\Delta \rho_{1,i}^T \quad \Delta \rho_{2,i}^T \quad \dots \quad \Delta \rho_{M,i}^T \right]^T$$

$$J_{\Sigma,i} \times 1 \quad 1 \times J_{1,i} \quad 1 \times J_{2,i} \quad \dots \quad 1 \times J_{M,i}$$

— вектор невязок ионосферосвободных псевдодальностей, упорядоченный по станциям и внутри станций по НКА;

$$\Delta \rho_{m,i} = \left[\Delta \rho_{m,i}^1 \quad \Delta \rho_{m,i}^2 \quad \dots \quad \Delta \rho_{m,i}^{J_{m,i}} \right]^T, \quad m = \overline{1, M}$$

— вектор невязок ионосферосвободных

псевдодальностей, сформированных m -й станцией, упорядоченный по НКА; $\Delta \rho_{m,i}^j$, $m = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, J_{m,i}}$ — невязка ионосферосвободной псевдодальности, сформированной на m -й станции по j -му НКА;

$$\Delta \mathbf{L}_i = \left[\Delta L_{1,i}^T \quad \Delta L_{2,i}^T \quad \dots \quad \Delta L_{M,i}^T \right]^T$$

$$J_{\Sigma,i} \times 1 \quad 1 \times J_{1,i} \quad 1 \times J_{2,i} \quad \dots \quad 1 \times J_{M,i}$$

— вектор невязок ионосферосвободных псевдофаз, упорядоченный по станциям и внутри станций по НКА;

$$\Delta \mathbf{L}_{m,i} = \left[\Delta L_{m,i}^1 \quad \Delta L_{m,i}^2 \quad \dots \quad \Delta L_{m,i}^{J_{m,i}} \right]^T, \quad m = \overline{1, M}$$

— вектор невязок ионосферосвободных псевдофаз, сформированных m -й станцией, упорядоченный по НКА; $\Delta L_{m,i}^j$, $m = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, J_{m,i}}$ — невязка ионосферосвободной псевдофазы, сформированной на m -й станции по j -му НКА;

$$\Delta m w_i = \left[\Delta m w_{1,i}^T \quad \Delta m w_{2,i}^T \quad \dots \quad \Delta m w_{M,i}^T \right]^T$$

$$J_{\Sigma,i} \times 1 \quad 1 \times J_{1,i} \quad 2 \times J_{2,i} \quad \dots \quad 1 \times J_{M,i}$$

— вектор невязок комбинаций Мельбурна–Вуббена, упорядоченных по станциям и внутри станций по НКА;

$$\Delta m w_{m,i} = \left[\Delta m w_{m,i}^1 \quad \Delta m w_{m,i}^2 \quad \dots \quad \Delta m w_{m,i}^{J_{m,i}} \right]^T, \quad m = \overline{1, M}$$

— вектор невязок комбинаций Мельбурна–Вуббена, сформированный на m -й станции, упорядоченный по НКА; $\Delta t w_{m,i}^j$, $m = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, J_{m,i}}$ — невязка комбинации

Мельбурна–Вуббена, сформированной на m -й станции по j -му НКА;

$$\mathbf{x}_{net.i} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D}_i^T & \mathbf{d} \mathbf{T}_{\rho,i}^T & \mathbf{d} \mathbf{T}_{L,i}^T & \mathbf{B}_{mw,i}^T \\ 1 \times M & 1 \times M & 1 \times M & 1 \times M \\ \mathbf{d} \mathbf{t}_{\rho,i}^T & \mathbf{d} \mathbf{t}_{L,i}^T & \mathbf{b}_{mw,i}^T & \mathbf{N} \mathbf{1}_i^T & \mathbf{N} \mathbf{T}_{mw,i}^T \\ 1 \times J_i & 1 \times J_i & 1 \times J_i & 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

— вектор оцениваемых переменных сетевой задачи размерности $nx_i = 4M + 3J_i + 2J_{\Sigma,i}$, в котором $\Delta \mathbf{D}_i^T = [\Delta D_{1,i}^T \ \Delta D_{2,i}^T \ \dots \ \Delta D_{M,i}^T]^T$ —

M -вектор нескомпенсированных частей вертикальных тропосферных задержек (м) в точках расположения НАП M станций наземной сети; $\mathbf{d} \mathbf{T}_{\rho,i}^T$ —

M -вектор смещений показаний ионосферосвободных кодовых часов M станций наземной сети; $\mathbf{d} \mathbf{T}_{L,i}^T$ — M -вектор смещений показаний ионосферосвободных фазовых часов M станций наземной сети; $\mathbf{B}_{mw,i}^T$ — M -вектор смещений комбинаций Мельбурна–Вуббена в аппаратуре M станций наземной сети; $\mathbf{d} \mathbf{t}_{\rho,i}^T$ — J_i -вектор смещений показаний ионосферосвободных кодовых часов

всех видимых сетью J_i НКА в i -й момент времени; $\mathbf{d} \mathbf{t}_{L,i}^T$ — вектор смещений показаний ионосферосвободных фазовых часов всех видимых сетью J_i НКА в i -й момент времени; $\mathbf{b}_{mw,i}^T$ —

J_i -вектор смещений комбинаций Мельбурна–Вуббена в аппаратуре всех видимых сетью J_i НКА в i -й момент времени; $\mathbf{N} \mathbf{1}_i^T$ — $J_{\Sigma,i}$ -вектор целочисленностей $N1$, входящих в уравнения системы (2), упорядоченных вначале по станциям сети и затем по НКА внутри станций на i -й момент времени; $\mathbf{N} \mathbf{T}_{mw,i}^T$ — $J_{\Sigma,i}$ -вектор целочисленностей N_{mw} , входящих в уравнения системы (2), упорядоченных вначале по станциям сети и затем по НКА внутри станций на i -й момент времени; $\mathbf{\Xi}_{net.i} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi} \rho_i^T & \mathbf{\Xi} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{\Xi} m \mathbf{w}_i^T \\ 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} \end{bmatrix}^T$ — вектор ошибок определения ионосферосвободных псевдодальностей $\mathbf{\Xi} \rho_i^T$, псевдофаз $\mathbf{\Xi} \mathbf{L}_i^T$ и комбинаций

$\mathbf{b}_{mw,i}^T$ — J_i -вектор смещений комбинаций Мельбурна–Вуббена в аппаратуре всех видимых сетью J_i НКА в i -й момент времени; $\mathbf{N} \mathbf{1}_i^T$ — $J_{\Sigma,i}$ -вектор целочисленностей $N1$, входящих в уравнения системы (2), упорядоченных вначале по станциям сети и затем по НКА внутри станций на i -й момент времени; $\mathbf{N} \mathbf{T}_{mw,i}^T$ — $J_{\Sigma,i}$ -вектор целочисленностей N_{mw} , входящих в уравнения системы (2), упорядоченных вначале по станциям сети и затем по НКА внутри станций на i -й момент времени; $\mathbf{\Xi}_{net.i} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi} \rho_i^T & \mathbf{\Xi} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{\Xi} m \mathbf{w}_i^T \\ 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} \end{bmatrix}^T$ — вектор ошибок определения ионосферосвободных псевдодальностей $\mathbf{\Xi} \rho_i^T$, псевдофаз $\mathbf{\Xi} \mathbf{L}_i^T$ и комбинаций

$\mathbf{b}_{mw,i}^T$ — J_i -вектор смещений комбинаций Мельбурна–Вуббена в аппаратуре всех видимых сетью J_i НКА в i -й момент времени; $\mathbf{N} \mathbf{1}_i^T$ — $J_{\Sigma,i}$ -вектор целочисленностей $N1$, входящих в уравнения системы (2), упорядоченных вначале по станциям сети и затем по НКА внутри станций на i -й момент времени; $\mathbf{N} \mathbf{T}_{mw,i}^T$ — $J_{\Sigma,i}$ -вектор целочисленностей N_{mw} , входящих в уравнения системы (2), упорядоченных вначале по станциям сети и затем по НКА внутри станций на i -й момент времени; $\mathbf{\Xi}_{net.i} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi} \rho_i^T & \mathbf{\Xi} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{\Xi} m \mathbf{w}_i^T \\ 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} \end{bmatrix}^T$ — вектор ошибок определения ионосферосвободных псевдодальностей $\mathbf{\Xi} \rho_i^T$, псевдофаз $\mathbf{\Xi} \mathbf{L}_i^T$ и комбинаций

$\mathbf{\Xi}_{net.i} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi} \rho_i^T & \mathbf{\Xi} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{\Xi} m \mathbf{w}_i^T \\ 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} & 1 \times J_{\Sigma,i} \end{bmatrix}^T$ — вектор ошибок определения ионосферосвободных псевдодальностей $\mathbf{\Xi} \rho_i^T$, псевдофаз $\mathbf{\Xi} \mathbf{L}_i^T$ и комбинаций

Мельбурна–Вуббена $\mathbf{\Xi} m \mathbf{w}_i^T$, которые формируются по тому же принципу, что и вектор $\mathbf{Y}_{net.i}$;

$$\mathbf{H}_{net.i} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{W}_i & \mathbf{d}_i & \mathbf{\Lambda}_i \\ 3J_{\Sigma,i} \times M & 3J_{\Sigma,i} \times 3(M+J_i) & 3J_{\Sigma,i} \times 2J_{\Sigma,i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

— матрица связи вектора наблюдений $\mathbf{Y}_{net.i}$ с вектором оцениваемых переменных $\mathbf{x}_{net.i}$ (4), в которой

$$\mathbf{H} \mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{w}_i^T & \mathbf{H} \mathbf{w}_i^T & \mathbf{0}_i^T \\ M \times J_{\Sigma,i} & M \times J_{\Sigma,i} & M \times J_{\Sigma,i} \end{bmatrix}^T$$

— $(3J_{\Sigma,i} \times M)$ -матрица коэффициентов $w_{m,i}^j$, $m = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, J_{m,i}}$ пересчета остаточных составляющих зенитных тропосферных задержек $\Delta D_{m,i}$, $m = \overline{1, M}$ (м) в наклонные задержки в соответствии с углом места каждого j -го НКА, видимого с m -й станции в каждый i -й момент времени;

$$\mathbf{H} \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_{1,i}^1 & \dots & w_{1,i}^{J_{1,i}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & w_{M,i}^1 & \dots & w_{M,i}^{J_{M,i}} \end{bmatrix}^T;$$

$$\mathbf{d}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times J_i & J_{\Sigma,i} \times J_i & J_{\Sigma,i} \times J_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} \\ J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times J_k & J_{\Sigma,i} \times J_i & J_{\Sigma,i} \times J_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} \\ J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times M & J_{\Sigma,i} \times J_i & J_{\Sigma,i} \times J_i & J_{\Sigma,i} \times J_i \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ J_{1,i} \times 1 & J_{1,i} \times 1 & \dots & J_{1,i} \times 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} \\ J_{2,i} \times 1 & J_{2,i} \times 1 & \dots & J_{2,i} \times 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{1} \\ J_{M,i} \times 1 & & & J_{M,i} \times 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad m = \overline{1, M};$$

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,i}^T & \mathbf{U}_{2,i}^T & \dots & \mathbf{U}_{M,i}^T \\ J_i \times J_{1,i} & J_i \times J_{2,i} & & J_i \times J_{M,i} \end{bmatrix}^T$$

— матрица, состоящая из M подматриц $\mathbf{U}_{m,i}$, $m = \overline{1, M}$, стоящих одна под другой. Каждая

подматрица $\mathbf{U}_{m,i}$ формируется из m -й ($m = \overline{1, M}$) где

строки матрицы $J_{m,i} \times J_i$ сценария, представленной в табл. 1, путем ее расщепления на $J_{m,i}$ строк, все элементы которых равны 0, за исключением единственного элемента, равного 1. Элементы, равные 1, располагаются в последовательных расщепленных строках подматрицы $\mathbf{U}_{m,i}$ на тех же $J_{m,i} \times J_i$

местах, где они располагаются в расщепляемой m -й строке матрицы сценария. На рис. 1 показан пример формирования подматрицы $\mathbf{U}_{1,i}$ $J_{1,i} \times J_i$ путем расщепления 1-й строки матрицы сценария на $J_{1,i} = 5$ строк.

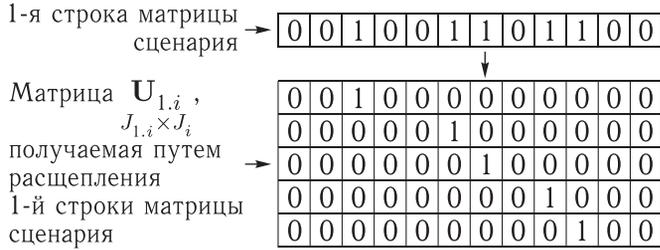


Рис. 1. Расщепление 1-й строки матрицы сценария на $J_{1,i} = 5$ строк

Остальные строки матрицы сценария расщепляются аналогично,

$$\mathbf{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}} \\ -\lambda_{\Delta nifr} \mathbf{E}_i & -\lambda_{n_2 ifr} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i}} & -\lambda_{mw} \mathbf{E}_i \end{bmatrix};$$

\mathbf{E}_i — единичная $(J_{\Sigma,i} \times J_{\Sigma,i})$ -матрица.

Для матрицы связи $\mathbf{H}_{net,i}$ (5) была найдена матрица $\mathbf{V}_{net,i}$, столбцы которой являются базисными векторами ее ядра (нуль-пространства):

$$\mathbf{V}_{net,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{V1}_{net,i} & \mathbf{V2}_{net,i} & \mathbf{V3}_{net,i} & \mathbf{V4}_{net,i} & \mathbf{V5}_{net,i} \\ nx_i \times 3 & nx_i \times M & nx_i \times M & nx_i \times (J_i - 1) & nx_i \times (J_i - 1) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{V1}_{net,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{1}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{1}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{1}_{M \times 1} \\ \mathbf{1}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{1}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{1}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{2J_{\Sigma,i} \times 1} & \mathbf{0}_{2J_{\Sigma,i} \times 1} & \mathbf{0}_{2J_{\Sigma,i} \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V2}_{net,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \lambda_{\Delta nifr} \mathbf{1}_{M \times 1}^1 & \lambda_{\Delta nifr} \mathbf{1}_{M \times 1}^2 & \dots & \lambda_{\Delta nifr} \mathbf{1}_{M \times 1}^M \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{1}_{J_{\Sigma,i} \times 1}^1 & \mathbf{1}_{J_{\Sigma,i} \times 1}^2 & \dots & \mathbf{1}_{J_{\Sigma,i} \times 1}^M \\ \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times 1} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V3}_{net,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \lambda_{n_2 ifr} \mathbf{1}_{M \times 1}^1 & \lambda_{n_2 ifr} \mathbf{1}_{M \times 1}^2 & \dots & \lambda_{n_2 ifr} \mathbf{1}_{M \times 1}^M \\ \lambda_{mw} \mathbf{1}_{M \times 1}^1 & \lambda_{mw} \mathbf{1}_{M \times 1}^2 & \dots & \lambda_{mw} \mathbf{1}_{M \times 1}^M \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times 1} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_{\Sigma,i} \times 1} \\ \mathbf{1}_{J_{\Sigma,i} \times 1}^1 & \mathbf{1}_{J_{\Sigma,i} \times 1}^2 & \dots & \mathbf{1}_{J_{\Sigma,i} \times 1}^M \end{bmatrix}$$

— матрицы, в которых $\mathbf{1}_{M \times 1}^m$ — вектор, все элементы которого нулевые, за исключением единицы, стоящей в m -й, $m = \overline{1, M}$ позиции; $\mathbf{1}_{J_{\Sigma,i} \times 1}^m$ — $J_{\Sigma,i}$ -вектор,

образуемый из M подвекторов $\mathbf{1}_{J_{m.i} \times 1}^m$, $m = \overline{1, M}$. Все $J_{m.i}$ -подвектора $\mathbf{1}_{J_{m.i} \times 1}^m$ нулевые, за исключением m -го, состоящего из единиц.

$$\mathbf{V4}_{net.i} = \begin{matrix} nx_i \times (J_i - 1) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{3M \times 1} & \mathbf{0}_{3M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3M \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ -\lambda_{\Delta nifr} \mathbf{1}_{J_i \times 1}^1 & -\lambda_{\Delta nifr} \mathbf{1}_{J_i \times 1}^2 & \dots & -\lambda_{\Delta nifr} \mathbf{1}_{J_i \times 1}^{J_i-1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{1s}_1^1 & \mathbf{1s}_1^2 & \dots & \mathbf{1s}_1^{J_i-1} \\ \mathbf{1s}_2^1 & \mathbf{1s}_2^2 & \dots & \mathbf{1s}_2^{J_i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1s}_M^1 & \mathbf{1s}_M^2 & \dots & \mathbf{1s}_M^{J_i-1} \\ \mathbf{0}_{J_{\Sigma.i} \times 1} & \mathbf{0}_{J_{\Sigma.i} \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_{\Sigma.i} \times 1} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\mathbf{V5}_{net.i} = \begin{matrix} nx_i \times (J_i - 1) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{0}_{M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{0}_{3M \times 1} & \mathbf{0}_{3M \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{3M \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \mathbf{0}_{J_i \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{J_k \times 1} & \mathbf{0}_{J_k \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{J_k \times 1} \\ \lambda_{mw} \mathbf{1}_{J_i \times 1}^1 & \lambda_{mw} \mathbf{1}_{J_i \times 1}^2 & \dots & \lambda_{mw} \mathbf{1}_{J_i \times 1}^{J_i-1} \\ -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_1^1 & -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_1^2 & \dots & -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_1^{J_i-1} \\ -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_2^1 & -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_2^2 & \dots & -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_2^{J_i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_M^1 & -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_M^2 & \dots & -\frac{\lambda_{n_2 ifr}}{\lambda_{\Delta nifr}} \mathbf{1s}_M^{J_i-1} \\ \mathbf{1s}_1^1 & \mathbf{1s}_1^2 & \dots & \mathbf{1s}_1^{J_i-1} \\ \mathbf{1s}_2^1 & \mathbf{1s}_2^2 & \dots & \mathbf{1s}_2^{J_i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1s}_M^1 & \mathbf{1s}_M^2 & \dots & \mathbf{1s}_M^{J_i-1} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

— матрицы, в которых $\mathbf{1s}_{m.i}^j$, $j = \overline{1, J_i - 1}$, $m = \overline{1, M}$ являются вектор-столбцами, за исключением последних, подматриц $\mathbf{U}_{m.i}$ матрицы \mathbf{U}_i , построение которых было рассмотрено ранее. Например, $J_{1.i} - 1$ вектор-столбцов $\begin{bmatrix} \mathbf{1s}_1^1 & \mathbf{1s}_1^2 & \dots & \mathbf{1s}_1^{J_i-1} \\ J_{1.i} \times 1 & J_{1.i} \times 1 & & J_{1.i} \times 1 \end{bmatrix}$ образуют матрицу $\mathbf{U}_{1.i}$, показанную на рис. 1, без последнего столбца, где $J_{1.i} = 5$ и $J_i = 12$.

Количество столбцов в матрице $\mathbf{V}_{net.i}$ $nx_i \times (2M + 2J_i + 1)$ (6) равно $2M + 2J_i + 1$, и поэтому недостаток ранга матрицы связи $\mathbf{H}_{net.i}$ (5) равен $dfh_i = 2M + 2J_i + 1$, а ее ранг $rnkh_i = nx_i - dfh_i = 2M + J_i + 2J_{\Sigma.i} - 1$. Видим, что в сетевой задаче, в отличие от пользовательской, недостаток ранга dfh_i матрицы $\mathbf{H}_{net.i}$ (5) зависит от числа J_i отслеживаемых НКА и количества M станций.

Как и в пользовательской задаче, система уравнений (3) сингулярна, т.е. имеет бесконечное множество решений, лежащих в dfh_i -мерном пространстве решений, смещенном параллельно ядру $\mathbf{V}_{net.i}$ (6). Однако, как видно из (6), первые M элементов базисных векторов-столбцов ядра $\mathbf{V}_{net.i}$ (6) равны нулю. Это означает, что пространство множества решений системы (3) ортогонально осям пространства переменных, вдоль которых откладываются первые M элементов вектора $\mathbf{x}_{net.i}$ (4). Как видно из (4), эти элементы образуют вектор $\mathbf{\Delta D}_i$. Поэтому первые M координат точек, лежащих в dfh_i -мерном пространстве решений, являются одинаковыми для всех точек этого пространства и, следовательно, все M элементов вектора $\mathbf{\Delta D}_i$, могут быть оценены однозначно. Остальные элементы вектора оцениваемых переменных $\mathbf{x}_{net.i}$ (4) являются со- переменными, т.е. могут быть оценены только в составе некоторых линейных комбинаций. К числу

сопеременных относятся и элементы целочисленных векторов \mathbf{N}_1 , \mathbf{N}_{mw} , а также векторов $\mathbf{dt}_{\rho,i}$, $J_{\Sigma,i} \times 1$, $J_{\Sigma,i} \times 1$, $J_i \times 1$

$\mathbf{dt}_{L,i}$, $\mathbf{b}_{mw,i}$, оценки которых являются целью решения сетевой задачи. Найдем выражения для вычисления линейных комбинаций, в которые будут входить элементы указанных векторов.

Определение линейных комбинаций, образуемых сопеременными, как и в пользовательской задаче, осуществляется с помощью теории S -преобразования [2–5], т. е. проектированием вдоль ядра $\mathbf{V}_{net,i}$ (6) всех точек пространства переменных на S -подпространство, размерность которого равна рангу матрицы $\mathbf{H}_{net,i}$ (5)

системы линейных уравнений (3). Аналогично пользовательской задаче S -подпространство в сетевой задаче задается системой нормальных уравнений [2, 3]

$$(\mathbf{S}_{net,i}^\perp)^T \mathbf{x}_{net,i} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где $\mathbf{S}_{net,i}^\perp$ — матрица ранга dfh_i , у которой все dfh_i вектор-столбцы ортогональны S -подпространству. Вектор координат точек проекций образует новый оцениваемый вектор переменных $\mathbf{x}_{net.s,i}$ той же размерности, что и исходный вектор $\mathbf{x}_{net,i}$ (4). Связь векторов переменных $\mathbf{x}_{net.s,i}$, $\mathbf{x}_{net,i}$ определяется выражением

$\mathbf{x}_{net.s,i}$, $\mathbf{x}_{net,i}$ $nx_i \times 1$ $nx_i \times 1$

$$\mathbf{x}_{net.s,i} = \mathbf{P}_{net,i} \mathbf{x}_{net,i}, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{P}_{net,i} = \mathbf{E}_i - \mathbf{V}_{net,i} \left((\mathbf{S}_{net,i}^\perp)^T \mathbf{V}_{net,i} \right)^{-1} (\mathbf{S}_{net,i}^\perp)^T.$$

Для сохранения целочисленности линейных комбинаций целочисленных сопеременных, являющихся компонентами целочисленных векторов \mathbf{N}_1 , $J_{\Sigma,i} \times 1$, \mathbf{N}_{mw} , входящих в исходный вектор оцениваемых переменных $\mathbf{x}_{net,i}$ (4), столбцы матрицы $\mathbf{S}_{net,i}^\perp$

$nx_i \times 1$ $nx_i \times dfh_i$

следует задавать аналогично заданию столбцов в матрице \mathbf{S}_i^\perp в пользовательской задаче [1], $(7+2J_i) \times 2$

а именно все элементы столбцов матрицы $\mathbf{S}_{net,i}^\perp$ $nx_i \times dfh_i$ следует задавать нулевыми, за исключением единственного элемента, равного 1.

Оценка $\hat{\mathbf{x}}_{net.s,i}$ нового вектора переменных $nx_i \times 1$ $\mathbf{x}_{net.s,i}$ в сетевой задаче может быть найдена из решения расширенной системы линейных уравнений, получаемой путем объединения систем (3) и (7):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{net,i} \\ 3J_{\Sigma,i} \times 1 \\ \mathbf{0} \\ dfh_i \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{net,i} \\ 3J_{\Sigma,i} \times nx_i \\ (\mathbf{S}_{net,i}^\perp)^T \\ dfh_i \times nx_i \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_{net.s,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}_{net,i} \\ 3J_{\Sigma,i} \times 1 \\ \mathbf{0} \\ dfh_i \times 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Из равенства $(\mathbf{S}_{net,i}^\perp)^T \mathbf{x}_{net,i} = \mathbf{0}$ (7) с учетом

специфического вида столбцов матрицы $\mathbf{S}_{net,i}^\perp$ $nx_i \times dfh_i$

следует, что элементы вектора решения $\hat{\mathbf{x}}_{net.s,i}$ $nx_i \times 1$

системы (9), стоящие на местах, определяемых положением единиц в dfh_i столбцах матрицы $\mathbf{S}_{net,i}^\perp$, $nx_i \times dfh_i$

должны быть равны нулю. Но если заранее известно, что dfh_i элементов вектора решения $\hat{\mathbf{x}}_{net.s,i}$ $nx_i \times 1$

системы (9) являются нулевыми, то оценка остальных $rnkh_i$ элементов вектора решений системы (3) может быть получена путем решения более простой системы линейных уравнений

$$\mathbf{Y}_{net,i} = \mathbf{H}_{net.cmpr,i} \mathbf{x}_{net.cmpr,i} + \mathbf{\Xi}_i, \quad (10)$$

где $\mathbf{H}_{net.cmpr,i}$ — сжатая матрица, получаемая из исходной матрицы $\mathbf{H}_{net,i}$ (5), где отброшены dfh_i столбцов с номерами равны номерам позиций, в которых расположены единицы в dfh_i столбцах матрицы $\mathbf{S}_{net,i}^\perp$; $\mathbf{x}_{net.cmpr,i}$ — сжатый вектор оцениваемых переменных, получаемый из исходного вектора $\mathbf{x}_{net.s,i}$, в котором исключены все нули. Таким образом, мы видим, что положение единиц в dfh_i столбцах

матрицы $\mathbf{S}_{net.i}^\perp$ определяет номера отбрасываемых dfh_i столбцов исходной матрицы $\mathbf{H}_{net.i}$ (5).

Но это отбрасывание столбцов должно быть таким, чтобы ранг сжатой матрицы $\mathbf{H}_{net.cmpr.i}$ оставался равным рангу $rnkh_i$ исходной матрицы $\mathbf{H}_{net.i}$ (5). Это требование удовлетворяется, если одну из M станций наземной сети с номером r (reference) $1 \leq r \leq M$ определить как опорную и формировать матрицу $\mathbf{S}_{net.i}^\perp$ как составную в виде объединения трех подматриц $\mathbf{S}_{net.i}^\perp =$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{net.time.i}^\perp & \mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp & \mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp \\ nx_i \times 3 & nx_i \times (dfh_i - 3)/2 & nx_i \times (dfh_i - 3)/2 \end{bmatrix}. \text{ Единицы в трех столбцах первой подматрицы } \mathbf{S}_{net.time.i}^\perp$$

располагаются соответственно на позициях $M + r$, $2M + r$, $3M + r$. Такое расположение единиц в столбцах подматрицы $\mathbf{S}_{net.time.i}^\perp$ соответствует положению в векторе исходных переменных $\mathbf{x}_{net.i}$ (4)

смещений показаний соответственно ионосферосвободных кодовых $dT_{\rho.r.i}$, фазовых $dT_{L.r.i}$ часов и смещению комбинации Мельбурна–Вуббена $b_{mw.r.i}$ r -й станции наземной сети. Расположение единиц в $(dfh_i - 3)/2 = M + J_i - 1$ столбцах подматриц $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ определяется

расположением единиц в так называемой матрице остоного дерева \mathbf{STM} (*spanning tree matrix*), элементы которой равны 0 либо 1. \mathbf{STM} имеет ту же размерность $M \times J_i$, что и матрица сценария, количество единиц в \mathbf{STM} равно $M + J_i - 1$, и все эти единицы являются подмножеством единиц матрицы сценария. Таким образом, \mathbf{STM} можно изобразить путем выделения, например затенением, части единиц матрицы сценария. Пример такого выделения показан в табл. 1.

\mathbf{STM} находится по матрице сценария с помощью специального алгоритма. К сожалению, ограничения на объем статьи не позволяют авторам его описать. При желании читатель может заимствовать его из [2, 6–9].

Число единиц $M + J_i - 1$ в \mathbf{STM} равно количеству столбцов в подматрицах $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$, т. е. каждая единица \mathbf{STM} размещается определенным образом в строках с номерами $l = 4M + 3J_i + 1$, $4M + 3J_i + J_{\Sigma.i}$ одного из столбцов подматрицы $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$ и в строках с номерами $l = 4M + 3J_i + J_{\Sigma.i} + 1$, $4M + 3J_i + 2J_{\Sigma.i}$ одного из столбцов подматрицы $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ в соответствии со следующим алгоритмом. Все единицы, входящие в матрицу сценария, индексируются первым нижним индексом в порядке их расположения слева направо и по строкам сверху вниз в пределах от 1 до $J_{\Sigma.i}$. Затем те единицы матрицы сценария, которые входят в матрицу \mathbf{STM} , индексируются вторым нижним индексом в том же порядке в пределах от 1 до $M + J_i - 1$. В результате единицы, входящие в матрицу \mathbf{STM} , будут иметь два индекса, а остальные единицы только один. Пример такой индексации показан в табл. 1. Дважды индексированные единицы, входящие в матрицу \mathbf{STM} , выделены затенением.

Обозначим первый индекс дважды индексированных единиц как μ ($\mu = \overline{1, J_{\Sigma.i}}$), а второй индекс — как ν ($\nu = \overline{1, M + J_i - 1}$). Каждой двухиндексной единице ставим в соответствие столбец из матриц $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ с номером ν . В элемент $nx_i \times (M + J_i - 1)$ $nx_i \times (M + J_i - 1)$ с номером $4M + 3J_i + \mu$ ν -го столбца матрицы $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$ помещаем 1, остальные элементы этого столбца нулевые. Аналогично в элемент с номером $4M + 3J_i + J_{\Sigma.i} + \mu$ ν -го столбца матрицы $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ помещаем 1, остальные элементы этого столбца нулевые.

Единственное решение системы (10) может быть получено при условии, что число строк сжатой матрицы $\mathbf{H}_{net.cmpr.i}$ больше или равно размерности сжатого вектора оцениваемых переменных $\mathbf{x}_{net.cmpr.i}$, т. е. должно выполняться условие $(nx_i - dfh_i) \times 1$

Число единиц $M + J_i - 1$ в \mathbf{STM}

равно количеству столбцов в подматрицах $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$, т. е. каждая

единица \mathbf{STM} размещается определенным образом в строках с номерами $l =$

$4M + 3J_i + 1$, $4M + 3J_i + J_{\Sigma.i}$ одного из столбцов подматрицы $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$ и в строках с номерами $l = 4M + 3J_i + J_{\Sigma.i} + 1$, $4M + 3J_i + 2J_{\Sigma.i}$ одного из столбцов подматрицы $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$

в соответствии со следующим алгоритмом. Все единицы, входящие в матрицу сценария, индексируются первым нижним индексом в порядке их расположения слева направо и по строкам сверху вниз в пределах от 1 до $J_{\Sigma.i}$. Затем те единицы матрицы сценария, которые входят в матрицу \mathbf{STM} , индексируются вторым нижним индексом в том же порядке в пределах от 1 до $M + J_i - 1$. В результате единицы, входящие в матрицу \mathbf{STM} , будут иметь два индекса, а остальные единицы только один. Пример такой индексации показан в табл. 1. Дважды индексированные единицы, входящие в матрицу \mathbf{STM} , выделены затенением.

Обозначим первый индекс дважды индексированных единиц как μ ($\mu = \overline{1, J_{\Sigma.i}}$), а второй индекс — как ν ($\nu = \overline{1, M + J_i - 1}$). Каждой двухиндексной единице ставим в соответствие столбец из матриц $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ с номером ν . В элемент $nx_i \times (M + J_i - 1)$ $nx_i \times (M + J_i - 1)$ с номером $4M + 3J_i + \mu$ ν -го столбца матрицы $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$ помещаем 1, остальные элементы этого столбца нулевые. Аналогично в элемент с номером $4M + 3J_i + J_{\Sigma.i} + \mu$ ν -го столбца матрицы $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ помещаем 1, остальные элементы этого столбца нулевые.

Единственное решение системы (10) может быть получено при условии, что число строк сжатой матрицы $\mathbf{H}_{net.cmpr.i}$ больше или равно размерности сжатого вектора оцениваемых переменных $\mathbf{x}_{net.cmpr.i}$, т. е. должно выполняться условие $(nx_i - dfh_i) \times 1$

Число единиц $M + J_i - 1$ в \mathbf{STM}

равно количеству столбцов в подматрицах $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$, т. е. каждая

единица \mathbf{STM} размещается определенным образом в строках с номерами $l =$

$4M + 3J_i + 1$, $4M + 3J_i + J_{\Sigma.i}$ одного из столбцов подматрицы $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$ и в строках с номерами $l = 4M + 3J_i + J_{\Sigma.i} + 1$, $4M + 3J_i + 2J_{\Sigma.i}$ одного из столбцов подматрицы $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$

в соответствии со следующим алгоритмом. Все единицы, входящие в матрицу сценария, индексируются первым нижним индексом в порядке их расположения слева направо и по строкам сверху вниз в пределах от 1 до $J_{\Sigma.i}$. Затем те единицы матрицы сценария, которые входят в матрицу \mathbf{STM} , индексируются вторым нижним индексом в том же порядке в пределах от 1 до $M + J_i - 1$. В результате единицы, входящие в матрицу \mathbf{STM} , будут иметь два индекса, а остальные единицы только один. Пример такой индексации показан в табл. 1. Дважды индексированные единицы, входящие в матрицу \mathbf{STM} , выделены затенением.

Обозначим первый индекс дважды индексированных единиц как μ ($\mu = \overline{1, J_{\Sigma.i}}$), а второй индекс — как ν ($\nu = \overline{1, M + J_i - 1}$). Каждой двухиндексной единице ставим в соответствие столбец из матриц $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ с номером ν . В элемент $nx_i \times (M + J_i - 1)$ $nx_i \times (M + J_i - 1)$ с номером $4M + 3J_i + \mu$ ν -го столбца матрицы $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$ помещаем 1, остальные элементы этого столбца нулевые. Аналогично в элемент с номером $4M + 3J_i + J_{\Sigma.i} + \mu$ ν -го столбца матрицы $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ помещаем 1, остальные элементы этого столбца нулевые.

Единственное решение системы (10) может быть получено при условии, что число строк сжатой матрицы $\mathbf{H}_{net.cmpr.i}$ больше или равно размерности сжатого вектора оцениваемых переменных $\mathbf{x}_{net.cmpr.i}$, т. е. должно выполняться условие $(nx_i - dfh_i) \times 1$

Число единиц $M + J_i - 1$ в \mathbf{STM}

равно количеству столбцов в подматрицах $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$, т. е. каждая

единица \mathbf{STM} размещается определенным образом в строках с номерами $l =$

$4M + 3J_i + 1$, $4M + 3J_i + J_{\Sigma.i}$ одного из столбцов подматрицы $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$ и в строках с номерами $l = 4M + 3J_i + J_{\Sigma.i} + 1$, $4M + 3J_i + 2J_{\Sigma.i}$ одного из столбцов подматрицы $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$

в соответствии со следующим алгоритмом. Все единицы, входящие в матрицу сценария, индексируются первым нижним индексом в порядке их расположения слева направо и по строкам сверху вниз в пределах от 1 до $J_{\Sigma.i}$. Затем те единицы матрицы сценария, которые входят в матрицу \mathbf{STM} , индексируются вторым нижним индексом в том же порядке в пределах от 1 до $M + J_i - 1$. В результате единицы, входящие в матрицу \mathbf{STM} , будут иметь два индекса, а остальные единицы только один. Пример такой индексации показан в табл. 1. Дважды индексированные единицы, входящие в матрицу \mathbf{STM} , выделены затенением.

Обозначим первый индекс дважды индексированных единиц как μ ($\mu = \overline{1, J_{\Sigma.i}}$), а второй индекс — как ν ($\nu = \overline{1, M + J_i - 1}$). Каждой двухиндексной единице ставим в соответствие столбец из матриц $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$, $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ с номером ν . В элемент $nx_i \times (M + J_i - 1)$ $nx_i \times (M + J_i - 1)$ с номером $4M + 3J_i + \mu$ ν -го столбца матрицы $\mathbf{S}_{net.N1.i}^\perp$ помещаем 1, остальные элементы этого столбца нулевые. Аналогично в элемент с номером $4M + 3J_i + J_{\Sigma.i} + \mu$ ν -го столбца матрицы $\mathbf{S}_{net.Nmw.i}^\perp$ помещаем 1, остальные элементы этого столбца нулевые.

$3J_{\Sigma.i} \geq (nx_i - dfh_i) = 2M + J_i + 2J_{\Sigma.i} - 1$. Отсюда получаем следующее ограничение: $J_{\Sigma.i} \geq 2M - J_i - 1$, которое должно выполняться для получения единственного решения сетевой задачи.

В общем случае аналитическое вычисление по формуле (8) вектора переменных $\mathbf{x}_{net.s.i}$, в кото-

рый будут входить линейные комбинации элементов векторов $\mathbf{N1}$, \mathbf{N}_{mw} , а также векторов $\mathbf{dt}_{\rho.i}$,

$\mathbf{dt}_{L.i}$ и $\mathbf{b}_{mw.s.i}$, является очень громоздким. Для

уменьшения громоздкости рассмотрим вычисление вектора $\mathbf{x}_{net.s.i}$ для предельно упрощенного случая

$M = 3$, $J_i = 4$ с матрицами сценария и \mathbf{STM} ,

представленными в табл. 2.

Таблица 2. Видимость НКА станциями сети для упрощенного случая $M = 3$, $J_i = 4$, $J_{\Sigma.i} = 9$

	m	Номера НКА, видимые всеми станциями наземной сети				J_m
		1	2	3	4	
Станции наземной сети	1	1 ₁₁	1 ₂₂	1 ₃₃	0	3
	2	1 ₄₄	0	1 ₅	1 ₆₅	3
	3	0	1 ₇	1 ₈	1 ₉₆	3

Для случая $M = 3$, $J_i = 4$, $J_{\Sigma.i} = 9$ вектор переменных $\mathbf{x}_{net.s.i}$ (8) и соответствующая

ему матрица проекции $\mathbf{P}_{net.i}$ даже в рассматрива-

емом упрощенном случае будут очень громоздкими.

Поэтому далее приводятся выражения только для интересующих нас подвекторов $\Delta \mathbf{D}_{s.i}$, $\mathbf{dt}_{\rho.s.i}$,

$\mathbf{dt}_{L.s.i}$, $\mathbf{b}_{mw.s.i}$, $\mathbf{N1}_{s.i}$, $\mathbf{N}_{mw.s.i}$ векторы переменных

$\mathbf{x}_{net.s.i}$ (8) при $r = 1$, полученных с помощью аппарата символьных вычислений MATLAB.

$$\Delta \mathbf{D}_{i,k} = \begin{bmatrix} \Delta D_{1,i} \\ \Delta D_{2,i} \\ \Delta D_{3,i} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{dt}_{\rho.s.i} = \begin{bmatrix} dt_{\rho.i}^1 - dT_{\rho.r.i} \\ dt_{\rho.i}^2 - dT_{\rho.r.i} \\ dt_{\rho.i}^3 - dT_{\rho.r.i} \\ dt_{\rho.i}^4 - dT_{\rho.r.i} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{dt}_{L.s.i} =$$

$$= \begin{bmatrix} dt_{L.i}^1 - dT_{L.r.i} + \lambda_{\Delta nifr} N1_1^1 + \lambda_{n2ifr} N_{mw1}^1 \\ dt_{L.i}^2 - dT_{L.r.i} + \lambda_{\Delta nifr} N1_1^2 + \lambda_{n2ifr} N_{mw1}^2 \\ dt_{L.i}^3 - dT_{L.r.i} + \lambda_{\Delta nifr} N1_1^3 + \lambda_{n2ifr} N_{mw1}^3 \\ dt_{L.i}^4 - dT_{L.r.i} + \lambda_{\Delta nifr} (N1_1^1 - N1_2^1 + N1_2^4) + \\ + \lambda_{n2ifr} (N_{mw1}^1 - N_{mw2}^1 + N_{mw2}^4) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{mw.s.i} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{mw}^1 - b_{mw.r} + \lambda_{mw} N_{mw.1}^1 \\ b_{mw}^2 - b_{mw.r} + \lambda_{mw} N_{mw.1}^2 \\ b_{mw}^3 - b_{mw.r} + \lambda_{mw} N_{mw.1}^3 \\ b_{mw}^4 - b_{mw.r} + \lambda_{mw} (N_{mw.1}^1 - N_{mw.2}^1 + N_{mw.2}^4) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N1}_{s.i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N1_2^3 - N1_2^1 + N1_1^1 - N1_1^3 \\ 0 \\ N1_3^2 - N1_3^4 + N1_2^4 - N1_2^1 + N1_1^1 - N1_1^2 \\ N1_3^3 - N1_3^4 + N1_2^4 - N1_2^1 + N1_1^1 - N1_1^3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{mw.s.i} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_{mw2}^3 - N_{mw2}^1 + N_{mw1}^1 - N_{mw1}^3 \\ 0 \\ N_{mw3}^2 - N_{mw3}^4 + N_{mw2}^4 - \\ - N_{mw2}^1 + N_{mw1}^1 - N_{mw1}^2 \\ N_{mw3}^3 - N_{mw3}^4 + N_{mw2}^4 - \\ - N_{mw2}^1 + N_{mw1}^1 - N_{mw1}^3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Как видно из выражений (11), элементы вектора $\Delta \mathbf{D}_{M \times 1}^T = [\Delta D_{1,i} \ \Delta D_{2,i} \ \Delta D_{3,i}]^T$ нескомпенсированных частей вертикальных тропосферных задержек (м) в точках расположения трех станций

наземной сети, как и ожидалось, оцениваются без смещений, исходные целочисленные неоднозначности $\mathbf{N}_{1,i}$, $\mathbf{N}_{mw,i}$ оцениваются со смещениями, т. е. в составе линейных комбинаций $\mathbf{N}_{1,s,i}$, $\mathbf{N}_{mw,s,i}$, которые также являются целочисленными. Интересующие нас векторы переменных $\mathbf{dt}_{\rho,i}$, $\mathbf{dt}_{L,i}$, $\mathbf{b}_{mw,i}$ также оцениваются со смещениями, т. е. в составе линейных комбинаций $\mathbf{dt}_{\rho,s,i}$, $\mathbf{dt}_{L,s,i}$, $\mathbf{b}_{mw,s,i}$. Однако, как видно из (11), для всех J_i НКА смещения оценок переменных, входящих в вектор $\mathbf{dt}_{\rho,i}$, одинаковы и равны смещению $dT_{\rho,r,i}$ показаний кодовых часов опорной (*reference*) станции; смещения оценок переменных, входящих в вектор $\mathbf{dt}_{L,i}$, одинаковы с точностью до целочисленной комбинации длин волн $\lambda_{\Delta niffr}$, λ_{n_2iffr} и смещения оценок переменных, входящих в вектор $\mathbf{b}_{mw,i}$, одинаковы с точностью до целого числа длин волн λ_{mw} . Это приводит к соответствующим смещениям в значениях невязок ионосферосвободных комбинаций псевдодальностей $\Delta\rho_{iffr,i}^j = \rho_{iffr,i}^j - R_{c,i}^j + dt_{\rho,iffr,i}^j$, псевдофаз $\Delta L_{iffr,i}^j = L_{iffr,i}^j - R_{c,i}^j + dt_{L,iffr,i}^j$ и комбинаций Мельбурна–Вуббена $\Delta mw_i^j = mw_i^j + b_{mw,i}^j$, входящих в левые части системы уравнений, которую необходимо решать в пользовательской задаче. Но свойства этой системы таковы, что внесение указанных смещений в ее левые части не изменяет оценок однозначно оцениваемых переменных Δx , Δy , Δz , ΔD_i . Таким образом, для получения оценок переменных Δx , Δy , Δz , ΔD_i вместо оценок переменных, являющихся компонентами векторов $\mathbf{dt}_{\rho,i}$, $\mathbf{dt}_{L,i}$, $\mathbf{b}_{mw,i}$, в пользовательской задаче можно использовать их смещенные эквиваленты, являющиеся компонентами векторов $\mathbf{dt}_{\rho,s,i}$, $\mathbf{dt}_{L,s,i}$, $\mathbf{b}_{mw,s,i}$ (11).

$$\mathbf{dt}_{\rho,s,i}, \mathbf{dt}_{L,s,i}, \mathbf{b}_{mw,s,i} \quad (11).$$

Алгоритмы решения системы линейных уравнений (10) с учетом целочисленности части ее переменных лежат в основе алгоритмов оценивания переменных, служащих элементами векторов $\mathbf{dt}_{\rho,s,i}$, $\mathbf{dt}_{L,s,i}$, $\mathbf{b}_{mw,s,i}$, которые являются целью

решения сетевой задачи целочисленного ВАМО. К сожалению, ограничения на объем статьи не позволяют авторам рассмотреть в статье эти алгоритмы. Мы можем только рекомендовать читателю соответствующую литературу по методам линейного рекуррентного оценивания [10, 11] и разрешения неоднозначности целочисленностей псевдофазовых измерений [12–15].

Примеры определения высокоточных корректирующих поправок и их свойства

Было реализовано два варианта сетевого решения. Первое решение получено по 5 европейским станциям в предположении неизменности созвездия НКА (все станции сети принимают измерения с одного и того же набора из 6 НКА). На рис. 2 в качестве примера показана зависимость от времени кодовых и фазовых разделенных спутниковых поправок, вычисленных для одного из 6 НКА в первом варианте сетевого решения.

В соответствии с (11) смещение между кодовыми и фазовыми поправками, показанное на рис. 2, может отличаться от истинного на целое число длин волн $\lambda_{\Delta niffr}$, λ_{n_2iffr} . Видно, что данное смещение является постоянным в течение неизменного сценария наблюдений.

Во втором варианте сетевого решения использовались измерения с 10 станций сети СДКМ (выделены на рис. 3 зелеными кружками) при меняющемся созвездии НКА. На разных станциях сети СДКМ применяется НАП с неидентичными характеристиками, что приводит к снижению точности оценивания разделенных поправок к показаниям часов НКА и соответственно к существенному понижению точности решения пользовательской задачи.

На рис. 4 [16] показана зависимость от времени кодовых и фазовых разделенных спутниковых поправок, вычисленных для одного из НКА во втором варианте сетевого решения. На графике видны скачки в фазовых поправках $dt_{L,s,i}^j$ в моменты смены сценария наблюдения и/или смены матрицы $\mathbf{STM}_{M \times J_i}$ связанные с изменением состава оцениваемых линейных комбинаций в компонентах вектора $\mathbf{dt}_{L,s,i}$.



Рис. 2. Разнесенные спутниковые поправки (кодовая и фазовая) для одного из 6 НКА, вычисленные в первом варианте сетевого решения

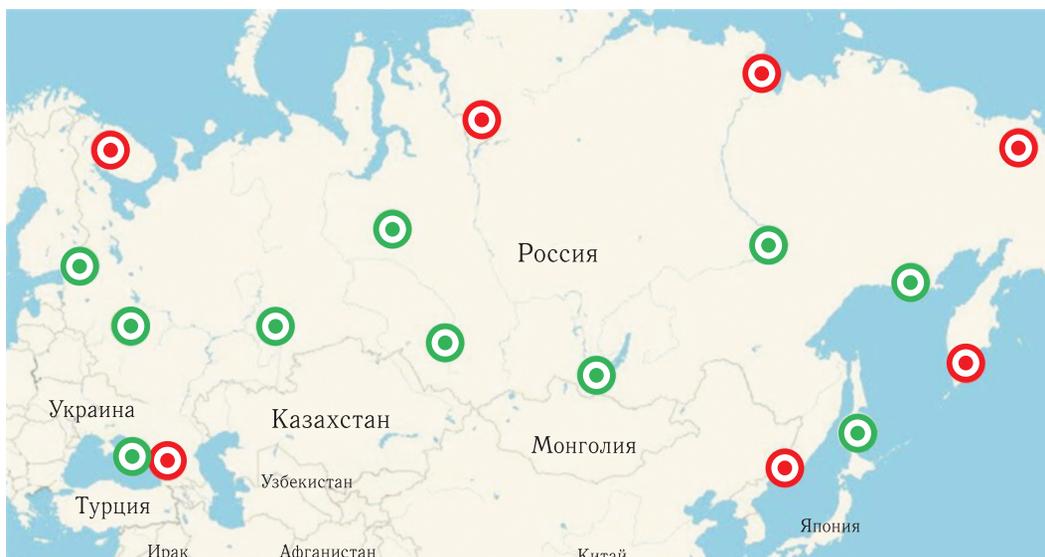


Рис. 3. Станции сети СДКМ, используемые во втором варианте сетевого решения [1]

Результаты решения пользовательских задач с использованием поправок, представленных на рис. 2 и 3, приведены в [1].

Заключение

Рассмотрены алгебраические основы решения сетевой задачи с разрешением неоднозначности

целочисленностей псевдофазовых измерений при ВАМО по сигналам ГНСС-КРК.

Приведены примеры результатов определения высокоточных корректирующих поправок по измерениям параметров навигационных сигналов GPS-методом целочисленного ВАМО. Использование этих поправок в пользовательской задаче приводит к значительному сокращению интервала проведения измерений, необходимого для достижения

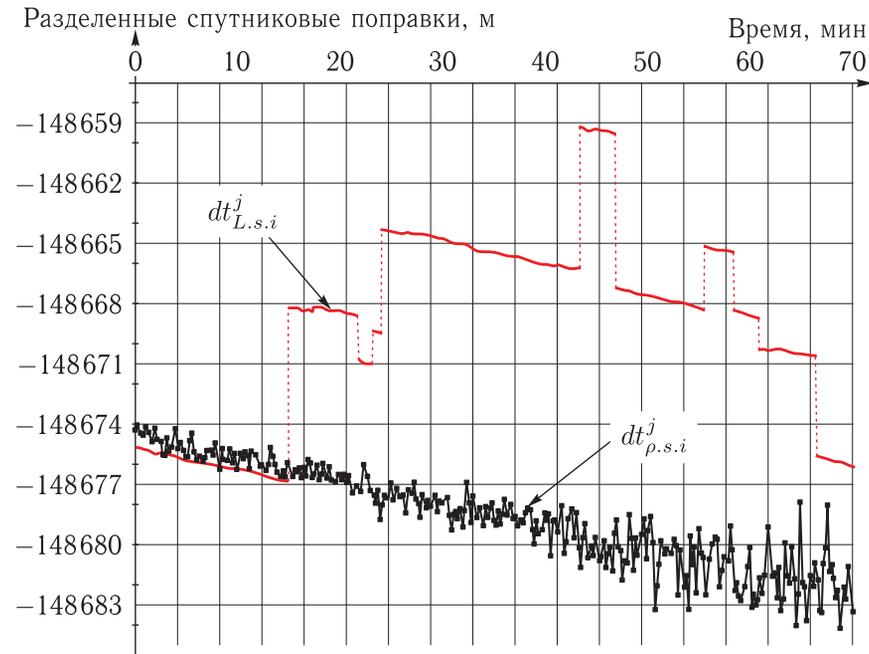


Рис. 4. Разделенные спутниковые поправки (кодированная и фазовая) для одного из НКА, вычисленные во втором варианте сетевого решения

высокоточного местоопределения, по сравнению с методом действительного ВАМО.

Как следует из выражения для вектора $dt_{\rho.s.i}^j$, 4×1

входящего в (11), в случае оперативного определения смещения $dT_{\rho.r.i}$ показаний ионосферосвободных кодовых часов опорной (*reference*) станции наземной сети относительно показаний часов ГНСС открывается возможность оперативной оценки смещений $dt_{\rho,i}^j$, $j = \overline{1, J_i}$ показаний ионосферосвободных кодовых часов всех J_i НКА, находящихся в зоне видимости станций наземной сети в i -й момент времени. Эта информация может использоваться для повышения точности частотно-временных поправок, передаваемых в навигационных сообщениях НКА.

Список литературы

1. Поваляев А. А., Подкорытов А. Н., Никитин С. А., Филимонова Д. В. Алгебраические основы обработки измерений при высокоточном абсолютном местоопределении по сигналам ГНСС с кодовым разделением каналов // *Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы*, 2019, т. 6, вып. 1. С. 4–16.
2. de Jonge P. J. A Processing Strategy for the Application of the GPS in Networks, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, 1998, 46. 225 pp.
3. Teunissen P. J. G. Generalised Inverses, Adjustment the Datum Problem and S-transformations. Preprint. Delft University of Technology // Reports of the Department of Geodesy Mathematical and Physical Geodesy, 1984.
4. Bisnath S., Collins P. Recent Developments in Precise Point Positioning // *Geomatica*, 2012, vol. 66, No. 2. P. 103–111.
5. Teunissen P. J. G., Khodabandeh A. Review and principles of PPP-RTK methods // *J. Geod.*, 2014. https://www.researchgate.net/publication/268520221_Review_and_principles_of_PPP-RTK_methods (Дата обращения 29.04.2019).
6. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест П., Штайн К. Минимальные остовные деревья // *Алгоритмы: построение и анализ* / Под ред. И. В. Красикова. 2-е изд. М.: Вильямс, 2005. Гл. 23. С. 644–662. ISBN 5-8459-0857-4.
7. Харари Ф. Теория графов / Пер. с англ. и предисл. В. П. Козырева; под ред. Г. П. Гаврилова. Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС, 2003. 296 с.

8. *Lannes A., Gratton S.* GNSS Networks in Algebraic Graph Theory // *Journal of Global Positioning Systems*, 2009, vol. 8, No. 1. P. 53–75.
9. *Lannes A., Teunissen P.J.G.* GNSS algebraic structures // *Journal of Geodesy*, 2011, vol. 85, Iss. 5. P. 272–290.
10. *Сейдж Э. и Мэлс Дж.* Теория оценивания и ее применения в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с. (Статистическая теория связи. Вып. 6).
11. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 2004. 608 с.
12. *Поваляев А.А.* Спутниковые радионавигационные системы. Время, показания часов, формирование измерений и определение относительных координат. М.: Радиотехника, 2008. 328 с.
13. *Hassibi A., Boyd S.* Integer Parameter Estimation in Linear Models with Applications to GPS // *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, 1996, vol. 3. P. 3245–3251. http://www.stanford.edu/~boyd/int_est.html
14. *De Jonge P. and Tiberius C.* The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects. August 1996. LGR. Delft Geodetic Computing Centre. Delft University of Technology. Faculty of Geodetic Engineering. Thisseweg 11. 2629 JA Delft. The Netherlands. <https://www.tudelft.nl/en/ceg/about-faculty/departments/geoscience-remote-sensing/> (Дата обращения 29.04.2019).
15. Радиосистемы и комплексы управления: учебник / В. А. Архангельский, В. А. Вейцель, А. С. Волковский и др.; под ред. В. А. Вейцеля. М.: Вузовская книга, 2016. 574 с.
16. *Подкорытов А.Н.* Повышение оперативности высокоточного абсолютного местоопределения в ГНСС: Сб. трудов IX Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космического приборостроения и информационных технологий» (5–7 июня 2018 г.). М.: АО «Российские космические системы», 2018. С. 37–43.