РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
2018, том 5, выпуск 3, с. 70–77

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИМИ АППАРАТАМИ, ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И СИСТЕМЫ ТЕЛЕМЕТРИИ

УДК 629.7 DOI 10.30894/issn2409-0239.2018.5.3.70.77

Планирование контроля надежности бортового оборудования космических аппаратов с использованием усеченных рисков

В. А. Мироничев, *v.mironichev@mail.ru*
Государственная корпорация по космической деятельности «Роскосмос», Москва, Российская Федерация
В. Б. Рудаков, *д.т.н., профессор, info@niiks.com*
«НИИ КС им. А. А. Максимова»–филиала АО «ГКНПЦ им. М. В. Хруничева», город Королев, Московская область, Российская Федерация

Аннотация. Получены математические зависимости для определения усеченных рисков принятия ошибочных решений, возникающих при контроле надежности изделий космических аппаратов (КА) на этапе их отработки, использование которых позволяет учесть всю накопленную априорную информацию о надежности изделий. Наличие этих рисков обусловлено стохастическим характером проявления отказов изделий, ограниченным временем проведения наземных испытаний, а в случае автоматизированного контроля, погрешностями системы контроля. При этом риски входят в состав целевой функции экономических затрат на контроль и потерь, минимизация которой приводит к оптимальным статистическим планам контроля надежности изделий.

Разработана математическая постановка задачи определения оптимальных планов.

Ключевые слова: иерархия, контроль, надежность, оптимизация, параметры, планирование, потери, риски 1 и 2 рода, требования, целевая функция, экономические затраты, изделие КА

Planning Onboard Equipment Reliability Control by Using Truncated Risks

V. A. Mironichev, *v.mironichev@mail.ru*
State Space Corporation Roscosmos, Moscow, Russian Federation
V. B. Rudakov, *Dr. Sci. (Engineering), info@niiks.com*
Space Systems Research and Development Institute "(NII KS)"–Branch of Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. Mathematical dependencies for defining the truncated risks of making wrong decisions were obtained. Such risks arise during control of spacecraft product reliability in the development phase and help take into account the accumulated a priori information regarding product reliability. The presence of these risks is due to the stochastic nature of the manifestation of product failures, the limited time of ground tests, and control system errors in the case of automated control. At the same time, risks are part of the target function of economic expenditures on control and losses, the minimization of which leads to optimal statistical plans for monitoring the reliability of products.

The mathematical formulation of the problem of determining optimal plans is developed.

Keywords: hierarchy, control, reliability, optimization, parameters, planning, losses, risk types 1 and 2, requirements, target function, economic expenditures, product, spacecraft

В настоящее время актуальным является направление совершенствования методологии обеспечения и подтверждения требуемого уровня надежности изделий КА на этапе их экспериментальной отработки. Реализация этого этапа традиционно требует вложения больших финансовых средств. Поскольку при отработке реализуются принципы статистического выборочного контроля, совершенствование методического обеспечения должно идти и в направлении дальнейшего развития моделей и алгоритмов планирования и проведения статистического выборочного контроля надежности изделий.

В работах [1, 2] были предложены методы оптимального планирования контроля надежности изделий КА, основанные на минимизации целевой функции затрат на контроль и потерь, связанных с рисками принятия ошибочных решений, возникающих при контроле. Эта целевая функция вытекают из самой статистической структуры контроля и имеет в общем случае следующий вид:

$$C_\Sigma = C_{1\alpha}\alpha + C_{1\varepsilon}\beta + C_{1K}n, \qquad (1)$$

где $C_{1\alpha}\alpha$ — математическое ожидание потерь за счет браковки годного изделия, то есть удовлетворяющего заданным требованиям по надежности (α — риск 1-го рода);

$C_{1\beta}\beta$ — математическое ожидание потерь за счет приемки дефектного изделия, то есть не удовлетворяющего заданным требованиям по надежности (β — риск 2-го рода);

$C_{1\alpha}, C_{1\beta}, C_{1K}$ — математические ожидания потерь и затрат на контроль одного изделия;

n — объем контроля (количество изделий, подвергаемых контролю, либо количество циклов контроля, связанное с постоянной длительностью контроля и т. д.), подлежащий определению.

Для биномиального плана контроля *априорные* риски 1-го и 2-го рода α и β, входящие в (1), представляют собой *безусловные* вероятности забраковать годное (удовлетворяющее требованиям по надежности) или принять дефектное изделие (не удовлетворяющее требованиям) соответственно. Они определяются следующим образом:

$$\alpha = \int\limits_{P_{\text{ТР}}}^{1} (1-P^n) f(P)\,dP = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int\limits_{P_{\text{ТР}}}^{1} (1-P^n) P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP, \qquad (2)$$

$$\beta = \int\limits_{0}^{P_{\text{ТР}}} P^n f(P)\,dP = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int\limits_{0}^{P_{\text{ТР}}} P^{n+b-1}(1-P)^{a-1}\,dP, \qquad (3)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — полная гамма-функция, или интеграл Эйлера 2-го рода [1];

$P_{\text{ТР}}$ — заданное значение вероятности безотказной работы изделия;

P — показатель надежности изделия, трактуется как случайная величина (в байесовском смысле), имеющая плотность бета-распределения

$$f(P) = \frac{1}{B(b,a)} P^{b-1}(1-P)^{a-1} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} P^{b-1}(1-P)^{a-1}, \qquad (4)$$

$$B(b,a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$ — полная бета-функция.

Параметры a и b априорного бета-распределения определяются известными методами по накопленной априорной статистической информации о надежности изделий с учетом ее неоднородности по известным моделям [1].

В [1] показано, что риски 1-го и 2-го рода с увеличением объема контроля n изменяются в противоположных направлениях, поэтому целевая функция (1), в зависимости от величин, в нее входящих, может быть возрастающей, убывающей и иметь минимум, которому соответствует оптимальный статистический план контроля $(n^*, \alpha^*, \beta^*, c = 0)$. Здесь c — приемочное число плана контроля (контрольный норматив), которое для высоконадежных изделий КА равно нулю.

Если функция является возрастающей, то контроль надежности проводить нецелесообразно, поскольку это приведет к увеличению экономических затрат и потерь, связанных с рисками принятия ошибочных решений. Если функция является убывающей, то необходим стопроцентный контроль всех изделий партии (если рассматривается партия изделий) или всех технических параметров изделия (если рассматриваются независимые параметры, определяющие надежность). И, наконец, если функция имеет минимум, то контроль следует проводить по оптимальному плану $(n^*, \alpha^*, \beta^*, c = 0)$. То есть сама целевая функция является как бы индикатором необходимости проведения контроля и испытаний.

Формализованная постановка задачи оптимального планирования контроля надежности [1,2] записывается следующим образом: найти такое значение $n > 0$ и соответствующие ему значения рисков α и β, которые доставляют минимум целевой функции (1), то есть найти

$$\min_{n,\alpha,\beta} C_\Sigma = \min_{n,\alpha,\beta}[C_{1\alpha}\alpha + C_{1\beta}\beta + C_{1k}n], \tag{5}$$

где

$$\alpha = \int_{P_{\text{ТР}}}^{1} (1 - P^n) f(P)\, dP, \tag{6}$$

$$\beta = \int_{0}^{P_{\text{ТР}}} P^n f(P)\, dP, \tag{7}$$

в области

$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < n \leqslant N. \tag{8}$$

Минимизация такой целевой функции при контроле любого изделия КА [1,2] по переменной n позволяет найти оптимальные планы контроля надежности $(n^*, \alpha^*, \beta^*, c = 0)$, включающие в себя оптимальные значения объема контроля и рисков 1-го и 2-го рода α^* и β^*, которые учитывают накопленную априорную информацию с учетом ее статистической неоднородности.

Приведенная постановка задачи (5)–(8) входит в состав метода оптимального планирования контроля надежности. В дальнейшем этот метод был развит в более сложные методы: метод иерархического контроля надежности, метод иерархического контроля технических параметров изделий КА [1–3], которые получили достаточно широкое распространение. При этом в [1] и [4] были разработаны математические зависимости для определения апостериорных рисков 1-го и 2-го рода, использование которых позволяет учесть на уровне вероятностей результаты контроля изделий нижних уровней иерархии при оптимальном планировании контроля изделий более высоких уровней.

Поскольку к изделиям КА предъявляются очень высокие требования по надежности, целесообразно, как отмечалось выше, устанавливать нулевое приемочное число или контрольный норматив $c = 0$ в планах контроля их надежности. При этом отказы изделий, которые могут возникнуть в процессе проведения их отработки, необходимо учитывать через параметры a и b априорного (4) и апостериорного бета-распределения показателя надежности изделия. Эти рекомендации находятся в полном соответствии с выводом академика А. Н. Колмогорова, приведенном в работах [5,6].

Анализируя выражения (2) и (3) для определения рисков 1-го и 2-го рода, можно увидеть, что они учитывают накопленную априорную информацию о надежности только через параметры бета-распределения (4), поскольку областью определения возможных значений показателя надежности P изделия КА является область $0 < P < 1$. Такая область определения представляет собой наиболее общий случай и ограничивает применение разработанных методов.

В то же время практика отработки показывает, что изделия, используемые в настоящее время в составе бортового оборудования КА, обладают высокой степенью преемственности и по ним накоплена достаточная априорная статистическая информация о надежности. С учетом указанных обстоятельств конкретизируем границы области возможных значений показателя P в формулах (2) и (3) для определения рисков. При этом заметим, что математическое ожидание случайной величины P, которая трактуется в байесовском смысле, при известной плотности распределения (4) определяется по формуле [1, 2]

$$m(P) = \frac{b}{a+b}. \tag{9}$$

Запишем заданные требования к показателю надежности изделия КА в следующем виде:

$$P_1 < P_{\text{тр}} < P_2, \tag{10}$$

где P_1 и P_2 — границы области возможных значений показателя P.

Значения P_1, P_2 могут быть определены по априорной информации о показателе надежности P с использованием плотности (4) бета-распределения следующим образом.

Представим гипотетически некоторое множество изделий (гипотетическая генеральная совокупность), которое условно разделим на два подмножества:

– подмножество изделий, удовлетворяющих требованию $P_{\text{тр}}$ (годное подмножество);

– подмножество изделий, не удовлетворяющих требованию $P_{\text{тр}}$ (дефектное подмножество).

Тогда в качестве границ P_1, P_2 могут быть приняты их оценки, выраженные через математические ожидания показателя P изделий соответственно 1-го и 2-го подмножества. Механизм перехода бета-распределения от области определения $0 < P < 1$ к области определения показателя надежности $P_1 < P_{\text{тр}} < P_2$ связан с усечением априорной плотности распределения по этой области. То есть распределение возможных значений показателя надежности в годном подмножестве $f_{\text{г}}(P)$ является усеченным в области определения $P_{\text{тр}} \leqslant P < 1$, а распределение возможных значений в дефектном подмножестве $f_{\text{Д}}(P)$ является усеченным в области определения $0 < P < P_{\text{тр}}$.

Используя известное правило [1, 2, 7] определения плотности распределения $f_y(x)$ усеченной непрерывной случайной величины X с интервалом усечения (a, b), получаем выражения для определения $f_{\text{Д}}(P)$ и $f_{\text{г}}(P)$:

$$f_{\text{Д}}(P) = \frac{f(P)}{\int_0^{P_{\text{ТР}}} f(p)\,dp}, \tag{11}$$

$$f_{\Gamma}(P) = \frac{f(P)}{\int_{P_{\text{ТР}}}^1 f(p)\,dp}. \tag{12}$$

Учитывая эти выражения, определяем математические ожидания показателя надежности P для дефектного и годного подмножества:

$$P_1 = m[P_1] = \int\limits_0^{P_{\text{тр}}} P f_{\text{Д}}(P)\,dP = \frac{\int_0^{P_{\text{тр}}} P f(P)\,dP}{\int_0^{P_{np}} f(P)\,dP}, \tag{13}$$

$$P_2 = m[P_2] = \int\limits_{P_{\text{тр}}}^{1} P f_{\Gamma}(P)\,dP = \frac{\int_{P_{\text{тр}}}^1 P f(P)\,dP}{\int_{P_{\text{тр}}}^1 f(P)\,dP}. \tag{14}$$

Далее получим выражение для математического ожидания P_1 с учетом вида априорной плотности бета-распределения (4). Для этого подставим (4) в выражение (13):

$$P_1 = m[P_1] = \frac{\int_0^{P_{\text{тр}}} P \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP}{\int_0^{P_{\text{тр}}} P \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP} = \\ = \frac{\int_0^{P_{\text{тр}}} P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP}{\int_0^{P_{np}} P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP}. \tag{15}$$

В формуле (15) рассмотрим интеграл, который находится в числителе, и выполним преобразования, умножив и разделив его на величину полной бета-функции $B(b+1, a)$, которая табулирована в [8, 9]:

$$\int\limits_0^{P_{\text{ТР}}} P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP = \frac{B(b+1,a)}{B(b+1,a)} \times \\ \times \int\limits_0^{P_{\text{ТР}}} P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP = B(b+1,a) \times \\ \times \left[\frac{1}{B(b+1,a)} \int\limits_0^{P_{\text{ТР}}} P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP\right] = \\ = B(b+1,a) I_{P_{\text{ТР}}}(b+1,a). \tag{16}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой интегральную функцию бета-распределения, обозначается $I_{P_{\text{ТР}}}(b+1, a)$ и называется неполной бета-функцией [1, 2, 8, 9], таблицы которой содержатся, например, в [8, 9].

По аналогии интеграл, стоящий в знаменателе выражения (15), разделим и умножим на величину полной бета-функции $B(b,a)$, получим

$$\int_0^{P_{\text{ТР}}} P^{(b-1)}(1-P)^{a-1}\,dP =$$
$$= B(b,a)\left[\frac{1}{B(b,a)}\int_0^{P_{\text{ТР}}} P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP\right] =$$
$$= B(b,a)I_{P_{\text{ТР}}}(b,a). \quad (17)$$

Учитывая (15)–(17), получаем

$$P_1 = m[P_1] = \frac{B(b+1,a)}{B(b,a)}\frac{I_{P_{\text{ТР}}}(b+1,a)}{I_{P_{\text{ТР}}}(b,a)}. \quad (18)$$

Поскольку аргументы a и b являются положительными действительными числами, бета-функция может быть выражена через гамма-функцию [8, 9] в соответствии с выражением (4). Тогда формулу (18) можно записать в виде

$$P_1 = m[P_1] = \frac{I_{P_{\text{ТР}}}(b+1,a)}{I_{P_{\text{ТР}}}(b,a)}\frac{\Gamma(b+1)\Gamma(a)\Gamma(b+a)}{\Gamma(b+1+a)\Gamma(b)\Gamma(a)}. \quad (19)$$

Используем известное свойство гамма-функции [8, 9]:

$$\Gamma(b+1) = b\Gamma(b) \quad \text{и} \quad \Gamma(b+a+1) = (b+a)\Gamma(b+a).$$

Подставив эти выражения в (19), окончательно получаем

$$P_1 = m[P_1] = \frac{b}{b+a}\frac{I_{P_{\text{ТР}}}(b+1,a)}{I_{P_{\text{ТР}}}(b,a)}. \quad (20)$$

Теперь определим математическое ожидание показателя надежности P для годного подмножества, используя формулу (14). Как и в предыдущем случае, преобразуем эту формулу к виду

$$P_2 = m[P_2] = \frac{\int_{P_{\text{тр}}}^1 PP^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP}{\int_{P_{\text{тр}}}^1 P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP} =$$
$$= \frac{\int_{P_{\text{тр}}}^1 P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP}{\int_{P_{\text{тр}}}^1 P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP}. \quad (21)$$

Далее рассмотрим числитель (21), умножим и разделим его на величину полной бета-функции $B(b+1,a)$ и выполним преобразования

$$\int_{P_{\text{тр}}}^1 P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP = B(b+1,a)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{B(b+1,a)}\int_{P_{\text{тр}}}^1 P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP\right] =$$
$$= B(B+1,a)\left[\frac{1}{B(b+1,a)}\int_0^1 P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{B(b+1,a)}\int_0^{P_{\text{ТР}}} P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP\right] =$$
$$= B(b+1,a)\times$$
$$\times\left[1-\frac{1}{B(b+1,a)}\int_0^{P_{\text{ТР}}} P^{(b+1)-1}(1-P)^{a-1}\,dP\right] =$$
$$= B(b-1,a)[1-I_{P_{\text{ТР}}}(b+1,a)]. \quad (22)$$

Теперь рассмотрим знаменатель (21), умножим и разделим его на величину полной бета-функции $B(b,a)$ и выполним аналогичные преобразования

$$\int_{P_{\text{тр}}}^1 P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP =$$
$$= B(b,a)\left[\frac{1}{B(b,a)}\int_{P_{\text{тр}}}^1 P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP\right] =$$
$$= B(b,a)\left[\frac{1}{B(b,a)}\int_0^1 P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{B(b,a)}\int_0^{P_{\text{ТЗ}}} P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP\right] =$$
$$= B(b,a)\left[1-\frac{1}{B(b,a)}\int_0^{P_{\text{ТР}}} P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP\right] =$$
$$= B(b,a)[1-I_{P_{\text{ТР}}}(b,a)]. \quad (23)$$

Учитывая (21)–(23), получаем

$$P_2 = m[P_2] = \frac{\int_{P_{\text{тр}}}^{1} P P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP}{\int_{P_{\text{тр}}}^{1} P^{b-1}(1-P)^{a-1}\,dP} = \\ = \frac{B(b+1,a)[1-I_{P_{\text{тр}}}(b+1,a)]}{B(b,a)[1-I_{P_{\text{тр}}}(b,a)]}. \quad (24)$$

Поскольку аргументы a и b являются положительными действительными числами, бета-функция может быть выражена через гамма-функцию [1, 8, 9], с использованием свойств которой окончательно получаем

$$P_2 = m[P_2] = \frac{B(b+1,a)[1-I_{P_{\text{тр}}}(b+1,a)]}{B(b,a)[1-I_{P_{\text{тр}}}(b,a)]} = \\ = \frac{b\Gamma(b)\Gamma(a)\Gamma(b+a)}{(b+a)\Gamma(b+a)\Gamma(b)\Gamma(a)} \frac{\left[1-I_{P_{\text{тр}}}(b+1,a)\right]}{\left[1-I_{P_{\text{тр}}}(b,a)\right]} = \\ = \frac{b}{(b+a)} \frac{\left[1-I_{P_{\text{тр}}}(b+1,a)\right]}{\left[1-I_{P_{\text{тр}}}(b,a)\right]}. \quad (25)$$

Если сравнить полученные выражения (20) и (25) с выражением (9), которое определяет математическое ожидание исходного бета-распределения (4), то видно, что усечение исходного распределения изменяет его математическое ожидание на величину соответствующих дробей, содержащих неполные бета-функции.

Таким образом, в результате получены выражения (20) и (25), которые определяют соответствующие границы области возможных значений показателя надежности P. Следует заметить, что граничные значения P_1 и P_2 являются переменными, поскольку зависят от величины заданных требований к показателю надежности $P_{\text{тр}}$ изделия КА и от величин a и b, которые определяются наличием априорной информации. Но всегда выполняются неравенства

$$0 < P_1 < P_{\text{тр}} \quad \text{и} \quad P_{\text{тр}} \leqslant P_2 < 1.$$

Тогда с учетом (20), (25) математические зависимости для определения рисков 1-го и 2-го рода (2) и (3) при контроле показателей надежности изделий КА на этапе отработки будут определяться следующими формулами:

$$\alpha = \int\limits_{P_{\text{ТР}}}^{P_2} (1-P^n) f(P)\,dP, \quad (26)$$

$$\beta = \int\limits_{P_1}^{P_{\text{ТР}}} P^n f(P)\,dP, \quad (27)$$

где P_2 и P_1 вычисляются по формулам (25) и (20).

Таким образом, в результате разработаны математические зависимости для определения рисков 1-го и 2-го рода, которые являются усеченными и которые входят в формализованную постановку (5)–(8) задачи определения оптимальных планов контроля надежности изделий КА при отработке. Использование этих рисков значительно расширяет область практического применения методов оптимального планирования, о которых говорилось выше. Эти риски являются функциями заданных требований к надежности изделия $P_{\text{Тр}}$, размера области $P_1 \leqslant P \leqslant P_2$, то есть математических ожиданий возможных значений показателя надежности P, определяемых на основе априорной информации, и параметров a и b априорного бета-распределения этого показателя.

Проведем исследование функций рисков 1-го и 2-го родов (26) и (27) в зависимости от изменения единственного аргумента n при крайних условиях, когда этот аргумент стремится к нулю и к бесконечности, то есть при $n \to 0$ и $n \to \infty$. Воспользуемся теорией вычисления пределов функций.

Найдем пределы функций усеченных рисков (26) и (27), учитывая, что показатель надежности изделия $P < 1$. В результате получим:

1) $\lim\limits_{n\to 0} \alpha = \lim\limits_{n\to 0} \int_{P_{\text{тр}}}^{P_2} [1-P^n]\cdot f(P)\cdot \mathrm{d}P = 0$,

$\lim\limits_{n\to 0} \beta = \lim\limits_{n\to 0} \int_{P_1}^{P_{\text{тр}}} P^n \cdot f(P)\cdot \mathrm{d}P = \int_{P_1}^{P_{\text{тр}}} f(P)\cdot \mathrm{d}P$;

2) $\lim\limits_{n\to \infty} \alpha = \lim\limits_{n\to \infty} \int_{P_{\text{тр}}}^{P_2} [1-P^n]\cdot f(P)\cdot \mathrm{d}P = \int_{P_{\text{тр}}}^{P_2} f(P)\,dP$,

$\lim\limits_{n\to \infty} \beta = \lim\limits_{n\to \infty} \int_{P_1}^{P_{\text{тр}}} P^n \cdot f(P)\cdot \mathrm{d}P = 0$.

Анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы.

1. При $n \to 0$:

– риск 1-го рода α становится равным нулю. Это совпадает с результатами, которые получены в [1, 2];

– риск 2-го рода β совпадает с вероятностью того, что изделие является дефектным (то есть не удовлетворяет заданным требованиям по надежности); причем величина этой вероятности есть $\int_{P_1}^{P_{\text{тр}}} f(P) \cdot \mathrm{d}P$ и она определяется априорной накопленной статистической информацией о надежности изделия, а также величиной заданных требований $P_{\text{тр}}$.

2. При $n \to \infty$:

– риск 2-го рода β становится равным нулю;

– риск 1-го рода α совпадает с вероятностью того, что изделие является годным (то есть удовлетворяет заданным требованиям по надежности); причем величина этой вероятности есть $\int_{P_{\text{тр}}}^{P_2} f(P) \times \times \mathrm{d}P$ и она также определяется накопленной статистической информацией о надежности изделия (в том числе и результатами гипотетически бесконечных испытаний), а также величиной заданных требований $P_{\text{тр}}$.

При этом поскольку плотность (4) бета-распределения $f(P)$ является усеченной в области $P_1 < P_{\text{тр}} < P_2$, то очевидно, что

$$\int_{P_1}^{P_{\text{тр}}} f(P) \cdot \mathrm{d}P + \int_{P_{\text{тр}}}^{P_2} f(P) \cdot \mathrm{d}P = \int_{P_1}^{P_2} f(P) \cdot \mathrm{d}P = 1.$$

Таким образом, проведенные исследования подтверждают противоположный характер изменения рисков 1-го и 2-го рода, что обосновывает использование функций потерь в качестве целевых функций для определения оптимальных планов контроля надежности изделий КА на этапе их отработки. При этом формализованная постановка задачи определения оптимальных планов контроля надежности вида $(n^*, \alpha^*, \beta^*, c = 0)$ имеет следующий вид: найти

$$\min_{n,\alpha,\beta} C_\Sigma = \min_{n,\alpha,\beta} [C_{1\alpha}\alpha + C_{1\beta}\beta + C_{1k}n], \tag{28}$$

где

$$\alpha = \int_{P_{\text{ТР}}}^{P_2} (1 - P^n) f(P)\, dP =$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{P_{\text{ТР}}}^{P_2} (1 - P^n) P^{b-1} (1-P)^{a-1}\, dP, \tag{29}$$

$$\beta = \int_{P_1}^{P_{\text{ТР}}} P^n f(P)\, dP =$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{P_1}^{P_{\text{ТР}}} P^{n+b-1} (1-P)^{a-1}\, dP, \tag{30}$$

$$P_2 = m[P_2] = \frac{b}{(b+a)} \frac{\left[1 - I_{P_{\text{ТР}}}(b+1, a)\right]}{\left[1 - I_{P_{\text{ТР}}}(b, a)\right]}, \tag{31}$$

$$P_1 = m[P_1] = \frac{b}{b+a} \frac{I_{P_{\text{ТР}}}(b+1, a)}{I_{P_{\text{ТР}}}(b, a)}, \tag{32}$$

в области

$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < n \leqslant N. \tag{33}$$

То есть формализованная постановка задачи определения оптимальных планов контроля изделий КА при отработке (28)–(33) совпадает с постановкой (5)–(8), однако вместо выражений для рисков (2) и (3) в ней присутствуют выражения (26) и (27), в которых P_2 и P_1 вычисляются по формулам (25) и (20).

Для решения задачи оптимизации (28)–(33) можно использовать в качестве основы алгоритм решения, разработанный в [1], и определить оптимальные статистические планы контроля надежности изделий КА, включающие в себя оптимальные объемы испытаний n^* и оптимальные риски 1-го и 2-го родов α^* и β^* при приемочном числе (контрольном нормативе) $c = 0$.

Список литературы

1. *Волков Л.И., Рудаков В.Б.* Статистический контроль иерархических систем. М.: Изд-во СИП РИА, 2002. 360 с.

2. *Меньшиков В.А.*, *Рудаков В.Б.*, *Сычев В.Н.* Контроль качества космических аппаратов при отработке и производстве. М.: Машиностроение, 2009. 400 с.

3. *Макаров М.И.*, *Рудаков В.Б.*, *Макаров В.М.* Риски принятия ошибочных решений в задаче рационального планирования контроля надежности электронных изделий ракетно-космической техники // Двойные технологии, 2017, №4. С. 21–30.

4. *Макаров М.И.*, *Рудаков В.Б. и др.* Апостериорные риски при планировании наземной отработки ракетно-космической техники // Двойные технологии, 2013, №3. С. 31–34.

5. *Беляев Ю.К.*, *Колмогоров А.Н.* Экономичные планы приемочного контроля // Доклад на IV Всесоюзном математическом съезде. Ленинград, 1966. С. 173–176.

6. *Беляев Ю.К.* Вероятностные методы выборочного контроля. М.: Наука, 1975. 406 с.

7. *Шор Я.Б.* Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М.: Советское радио, 1962. 551 с.

8. *Большев Л.Н.*, *Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.

9. *Пагурова В.И.* Таблицы неполной гамма-функции. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 239 с.