РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
2018, том 5, выпуск 1, с. 81–85

УДК 621.398 : 517   DOI 10.30894/issn2409-0239.2018.5.1.81.85

Теорема Котельникова–Шеннона и практическое использование целых функций для представления сигнала на приемной стороне

А. И. Трощенков, *аспирант, as181191@mail.ru*
АО «Российские космические системы», Москва, Российская Федерация

Аннотация. В статье приведены положения, объединяющие инженерный и математический подходы к обработке сигналов телеметрии и иных информационных сигналов на приемной стороне. Показана связь между табличным набором значений телеметрических параметров и имитирующими данные параметры функциями. Описан метод оценки характера изменения разных типов телеметрических параметров. Предложен ряд задач, решение которых сделает возможным применение математического аппарата Котельникова для экономного кодирования информации в качестве эффективной альтернативы используемым на сегодняшний день методам.

Результаты работы заключаются в четко поставленных инженерных задачах, инновационных подходах к обработке и представлению космической телеметрии. В совокупности с применением современных математических методов преобразования информации обозначенные положения позволяют реализовать разработку принципиально новых методов передачи информации.

Ключевые слова: теорема отсчетов, непрерывная функция, телеметрический сигнал, спектральная форма, граничная частота, отсчет, опрос, опросность, временная ось, аппроксимирующий многочлен, ортогональный базис

Sampling Theorem and Practical Usage of Entire Functions for Signal Representation on the Receiving Side

A. I. Troshchenkov, *post-graduate student, as181191@mail.ru*
Joint Stock Company “Russian Space Systems”, Moscow, Russian Federation

Abstract. The article contains the provisions uniting engineering and mathematical approaches to process telemetry signals and other information signals on the reception side. The connection between a tabular composition of the values of telemetric parameters and the functions simulating these parameters is shown. The method to evaluate the nature of the change of different types of telemetry parameters is described. A number of the tasks, the solution of which will make possible to apply the mathematical apparatus of Kotel'nikov for economical coding of information as an effective alternative to the methods used today, is offered.

The pay-offs of the paper consist in clearly set of engineering tasks, innovative approaches to processing and representation of the space telemetry. In conjunction with application of modern mathematical methods of data transformation, the presented provisions allow realization of the development of essentially new methods of information transfer.

Keywords: sampling theorem, continuous function, telemetry signal, spectral form, cutoff frequency, reading, sampling, sampling rate, time axis, approximating polynomial, orthogonal basis

В радиосвязи известна теорема Котельникова–Шеннона [1–3]. В формулировке К. Шеннона [4] теорема звучит следующим образом:

Теорема. *Если функция $f(x)$ не содержит составляющих с частотой выше W Гц, то она полностью определяется последовательностью ее значений в точках, отстоящих на расстоянии 1/2W друг от друга.*

Шеннон дал теореме наименование «теорема отсчетов». Под этим наименованием она и известна в англоязычной технической литературе.

Далее по тексту термины «функция» и «сигнал» будем считать синонимами, а $f(x) = f(t)$.

Определение. Функции, которые не содержат составляющих частот выше заданной (выше W Гц), называются функциями с ограниченным спектром.

Сформулированное в теореме утверждение является теоремой отсчетов во временно́м представлении. Известна также теорема отсчетов в частотном представлении (например, [4]).

Определение. «Отсчеты» в теореме Шеннона — это последовательность ее значений в точках, отстоящих на расстоянии 1/2W друг от друга. Фактически на основе этих значений формируются вспомогательные функции, сумма которых и представляет восстановленную форму сигнала.

Как известно, любая непрерывная функция может быть разложена на конечном отрезке в ряд Фурье, то есть представлена в спектральной форме — в виде суммы ряда синусоид с кратными (нумерованными) частотами с определенными амплитудами и фазами. У относительно гладких функций спектр быстро убывает (коэффициенты модуля спектра быстро стремятся к нулю). Для представления «изрезанных» функций, с разрывами и «изломами» нужны синусоиды с бо́льшими частотами.

В инженерной практике о том, что у Шеннона за «отсчетом» «стоит» функция, никто не помнит, и этими вспомогательными функциями для восстановления сигнала инженеры не пользуются. В инженерной практике под «отсчетом» понимается не функция, а значение сигнала в заданное время «опроса» сигнала («последовательность его значений в точках, отстоящих на расстоянии 1/2W друг от друга»).

Определение. «Опрос» — это процесс определения текущего мгновенного значения сигнала в заданный момент времени.

Определение. «Опросность» — это частота «опроса» сигнала.

Понятно, что в инженерной практике для восстановления сигнала на приемной стороне удобнее использовать не «функции-отсчеты», а «отсчеты» — мгновенные значения сигнала в точках «опроса» сигнала.

Класс функций с ограниченным спектром весьма велик. Достаточно отметить, что спектры бывают сплошные и линейчатые

Любой периодический сигнал можно представить в виде

$$s(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t},$$

где

$$\dot{A}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}A_n e^{-j\varphi_n}$$

— комплексные амплитуды спектра, содержащие информацию как об амплитудном, так и о фазовом спектрах.

Приведен спектр периодического сигнала — **линейчатый** спектр:

$$\dot{S}_n = \frac{1}{2}\dot{A}_n T = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t)e^{-l\omega t}\,dt.$$

Сплошной спектр (спектр непериодического сигнала):

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-l\omega t}\,dt.$$

$\dot{S}(\omega)$ — комплексный спектр, в нем содержится информация как о спектре амплитуд, так и о спектре фаз.

Из строгой математической теории рядов Фурье [5] известно, что функции с ограниченным спектром представимы на бесконечной оси времени, а функция, ограниченная по времени, представима на бесконечной оси частот (т. е. не является функцией с ограниченным спектром). Действительно, из рис. 1 и 2 видно, что периодический сигнал — сигнал, не ограниченный по времени, имеет спектр

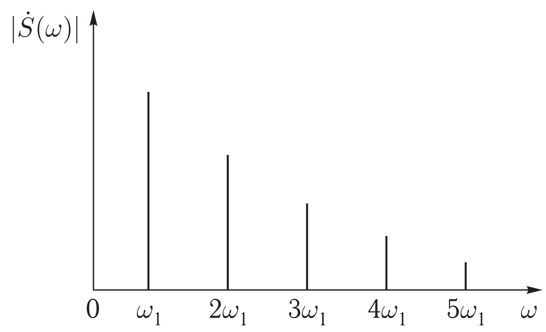

Рис. 1. Пример линейчатого спектра

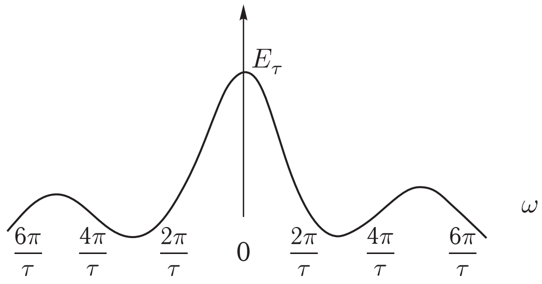

Рис. 2. Пример сплошного спектра

в виде ограниченного числа гармоник. Непериодический же сигнал — сигнал, ограниченный по времени, имеет спектр, не ограниченный на оси частот.

В инженерной практике передачи данных (в телевидении, в радиотелеметрии), когда время передачи данных заведомо ограничено, теоретически мы должны иметь дело с сигналами, имеющими неограниченный спектр. При этом возникают три инженерные задачи:

1. Задача «назначения» граничной частоты спектра, относительно которой более высокочастотными составляющими можно пренебречь.

2. Инженерная задача приближенного представления передаваемого сигнала на приемной стороне по его отсчетам (числам), сформированным на передающей стороне.

3. Задача оценки погрешности представления.

В. А. Котельников при доказательстве теоремы применил искусственный математический прием с использованием ряда [1], позднейшими исследователями названного рядом Котельникова.

В инженерной практике при представлении сигнала на приемной стороне математический аппарат Котельникова (как и «функции-отсчеты» Шеннона), предложенный им при доказательстве теоремы, не используется.

Таким образом, теорема Котельникова–Шеннона для инженеров-практиков представляет собой математическое обоснование возможности представления (на ограниченном отрезке времени) сигнала, состоящего из бесконечного количества точек, путем использования конечного количества чисел-отсчетов.

Для представления сигнала на приемной стороне используется хорошо разработанная теория аппроксимации. В этой теории применяются методы аппроксимации с использованием многочленов. В основе метода аппроксимации лежит теорема Вейерштрасса, доказанная им в XIX в. Известно несколько методов доказательства утверждения теоремы Вейерштрасса, среди которых наиболее предпочтительным для инженерного восприятия является доказательство, приведенное в [7].

Применительно к непрерывным функциям одного действительного переменного, заданным на конечном отрезке $[a, b]$, первая теорема Вейерштрасса утверждает: для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ существует последовательность обыкновенных многочленов, равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к $f(x)$ [7].

Сущность первой теоремы Вейерштрасса в том, что всякая непрерывная в конечном замкнутом интервале функция может быть разложена в равномерно сходящийся ряд, члены которого являются многочленами.

Более ясную связь разложения непрерывной периодической функции с периодом 2π дает вторая теорема Вейерштрасса [6, с. 40].

Если $F(t)$ — непрерывная функция с периодом 2π, то каково бы ни было число $\acute{\varepsilon} > 0$, существует тригонометрическая сумма $S_n(t)$, $S_n(t) = a_0 + \sum(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, где суммирование проводится по k, которое изменяется от 1 до n:

$$[n = n(\acute{\varepsilon})].$$

Эта сумма для всех t удовлетворяет неравенству

$$|F(t) - S_n(t)| \leqslant \acute{\varepsilon}.$$

Многочлены, как известно, принадлежат к классу целых функций [8].

К целым функциям относятся многочлены, показательная функция, тригонометрические функции (синус и косинус) и другие. Те целые функции, которые не являются многочленами (они называются трансцендентными), во многих отношениях ведут себя как своего рода «многочлены бесконечно высокой степени». В инженерном плане представляют интерес аппроксимация функций (сигналов) с использованием многочленов конечной степени.

Из представителей целых функций мы будем касаться только исследования многочленов конечной степени и тригонометрических функций.

Во введении к книге Я. И. Хургина и В. П. Яковлева [8] сказано, что теорема «отсчетов» — «это теорема о возможности для передачи сигнала с ограниченным спектром в принципе использовать не все его значения, а лишь отдельные периодически выбираемые ("равноотстоящие" — *Прим. авт.*) значения и при этом на приемном конце восстановить однозначно сигнал на всей временной оси».

Известна также теорема об особых неравноотстоящих «отсчетах» (ТОНО), или теорема отсчетов в особых точках, доказывающая возможность использования для восстановления сигнала «особых» отсчетов.

Под особыми отсчетами в данном случае понимаются значения сигнала, взятые в особых точках сигнала, где первая, вторая и другие производные равны нулю [10, 11], а равноотстоящие отсчеты рассматриваются как частный случай неравноотстоящих отсчетов. При этом для восстановления сигнала по неравноотстоящим отсчетам также используются многочлены конечной степени.

Далее в предисловии В. П. Хургина к [9] читаем: «Однако вскоре удалось понять: все дело в том, что функции с ограниченным спектром — это целые аналитические функции и, следовательно, формула Котельникова — это одна из возможных интерполяционных формул, используемых в теории целых функций». А еще ниже речь идет о доказательстве и обобщении студентами Б. С. Цыбаковым и В. П. Яковлевым теоремы Котельникова «с помощью аппарата теории интерполирования целых функций».

Однако анализ литературы показал, что публикации Б. С. Цыбакова и В. П. Яковлева с доказательством этого утверждения отсутствуют, либо доказательства опубликованы в малоизвестном издании малым тиражом.

С целью восстановления указанного пробела представляет интерес доказать или опровергнуть пять утверждений и указать условия существования этих утверждений:

1. Сигналы, математически представимые на конечном отрезке $[a, b]$ в виде многочленов конечной степени, являются функциями с ограниченным спектром.

2. Сигналы, математически представимые на конечном отрезке $[a, b]$ в виде тригонометрических функций (синус и косинус), являются функциями с ограниченным спектром.

3. Сигналы, математически представимые на конечном отрезке $[a, b]$ в виде отрезка показательной функции, являются функциями с ограниченным спектром.

4. Сигналы, математически представимые на конечном отрезке $[a, b]$ в виде целых функций, являются функциями с ограниченным спектром. Ввиду сложности это четвертое (общетеоретическое) утверждение можно оставить без доказательства в связи с учетом практической значимости для инженерной практики первых трех утверждений (теорем).

5. Непрерывный сигнал, представленный на передающей стороне в виде многочлена конечной степени, является сигналом с ограниченным спектром, причем W зависит от коэффициентов многочлена и определяется следующим выражением:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t}.$$

При практическом инженерном подходе представляет интерес доказательство трех первых частных утверждений, условий существования этих утверждений и нахождение для этих трех случаев граничной частоты W и «чисел» — аналогов числам «отсчетам» в теореме Шеннона. Отметим, что термин «отсчеты» введен К. Шенноном, а В. А. Котельников использовал термин «числа».

Понятно, что справедливо утверждение: если на конечном отрезке $[a, b]$ известно математическое представление сигнала в виде целой функции (многочлена, тригонометрической, показательной), то при априорной известности общего вида целой функции на передающей стороне сигнал может быть передан путем передачи конечного количества чисел, представляющих собой коэффициенты этой целой функции.

Известен математический аппарат разложения функций в ортогональных базисах [12]. Математический язык чистых математиков [12] требует существенных усилий для адаптации (перевода) этого языка на язык, понятный инженерам-практикам, занимающимся разработкой алгоритмов предварительной обработки данных на передающей стороне, и аппаратных средств связи, реализующих эти алгоритмы.

Если ортогональный базис имеет конечное количество ортогональных осей базиса разложения, то представление сигнала с ограниченным спектром в этом базисе содержит конечное количество членов разложения.

Конечное, без остатка количество членов представления функции, непрерывной на конечном отрезке $[a, b]$, представляет собой основную идею возможности представления этой функции с использованием конечного количества чисел.

Можно использовать понятие «обобщенного ограниченного спектра», введенного в [10].

Многочлен конечной степени представляет собой разложение сигнала по степеням, представляющее собой разложение в ортогональном базисе $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$.

Если коэффициенты членов разложения расположить по степени убывания по абсолютной величине, то величина коэффициента является аналогом амплитуды, а наименьший коэффициент разложения — неким аналогом «граничной частоты» W для сигналов с обобщенным ограниченным спектром.

Выводы

1. Утверждение, что «функции с ограниченным спектром — это целые аналитические функции» [8], содержит либо неточность, либо описку. Фактически речь должна идти о более узком классе целых аналитических функций — об аналитических функциях с конечным количеством членов, а если речь идет о многочленах, то о многочленах конечной степени, тем более что формула (ряд) Котельникова содержит конечное количество членов (*это частное или общее утверждение надо доказать или опровергнуть в теореме*).

2. Непрерывная функция с ограниченным спектром на $[a, b]$ с использованием отсчетов может быть представлена (аппроксимирована) с использованием многочлена конечной степени.

3. Представление (аппроксимация) на $[a, b]$ непрерывных сигналов с использованием многочлена конечной степени ставит задачи оценки погрешности аппроксимации и выбор–обоснование (в зависимости от заданного значения погрешности аппроксимации) максимальной степени аппроксимирующего многочлена.

Список литературы

1. *Котельников В.А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Радиотехника, 1995, №4–5 (сдвоенный). С. 42–55.
2. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике // Пер. с англ. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. С. 243–332.
3. *Джерри А.Дж.* Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения // ТИИЭР, 1977, т. 65, №11. С. 53–89.
4. *Голдман С.* Теория информации // Пер. с англ. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 446 с.
5. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947. 324 с.
6. *Гнеденко Б.В.* Введение в специальность «математика». М.: Наука, 1991.
7. *Маркушевич А.И.* Целые функции. 2-е изд. М.: Наука, 1975. 119 с.
8. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Методы теории целых функций в радиотехнике, теории связи и оптике. М.: Физматгиз, 1962. 220 с.
9. *Победоносцев В.А.* Основания информметрии. М.: Радио и связь, 2000. 193 с.
10. *Победоносцев В.А.* Теорема о неравноотстоящих отсчетах // Радиотехнические тетради. Спец. вып. М.: МЭИ, 1995, №8. С. 25–27.
11. *Победоносцев В.А.* Теоретические вопросы измерения количества информации непрерывных сигналов на конечных интервалах // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы, 2014, т. 1, вып. 2. С. 47–58.
12. *Размахнин М.К, Яковлев В.П.* Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. М.: Сов. радио, 1971. 256 с.