

УДК 681.3.06

## Адаптивный фильтр Калмана для оценки параметров отраженного сигнала

В. П. Кузнецов<sup>1</sup>, Е. П. Чураков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>к. т. н., доцент, <sup>2</sup>д. т. н., профессор  
Рязанский государственный радиотехнический университет  
e-mail: <sup>2</sup>e.churakov@yandex.ru

**Аннотация.** Построен адаптивный фильтр Калмана для оценивания частоты и фазы отраженного гармонического сигнала. Идея подхода состоит в представлении гармонического сигнала в виде решения однородного разностного уравнения второго порядка с единичными корнями.

**Ключевые слова:** гармонический сигнал, разностное уравнение, переменные состояния, фильтр Калмана

## Adaptive Kalman Filter for Radar Signal Parameters Estimation

V. P. Kuznetsov<sup>1</sup>, E. P. Churakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>candidate of engineering science, associate professor, <sup>2</sup>doctor of engineering science, professor  
Ryazan State Radio Engineering University  
e-mail: <sup>2</sup>e.churakov@yandex.ru

**Abstract.** Adaptive Kalman filter for estimation of frequency and difference of phases of harmonic signal measuring set is constructed. The approach based on representation of harmonic signal as solving of difference equation with roots on unit circle.

**Key words:** harmonic signal, difference equation, state variables, Kalman filter

## Постановка задачи, идея метода

В радиолокации хорошо известна задача определения координат движущегося объекта на основании отраженной электромагнитной волны, которая принимается несколькими датчиками, распределенными в пространстве. Один из датчиков назначается опорным, остальные — рабочими. Электромагнитная волна создает в датчиках электрические сигналы гармонического вида, которые и являются носителями информации об объекте. Координаты объекта определяются по разности фаз гармонических сигналов, возникающих в рабочих и опорном каналах. Решение задачи осложняется неизвестной вследствие доплеровского эффекта частотой отраженного сигнала.

Рассмотрим типовую реализацию отраженного сигнала и представим основную идею его обработки на основе адаптивного фильтра Калмана (рисунок).

Отраженный сигнал формируется по поясам дальности; на рисунке представлен один из таких поясов. На начальном этапе во входном сигнале присутствует постоянная составляющая и случайная помеха, обработка на этом этапе заключается в выделении постоянной составляющей и вычислении дисперсии сигнала, которая служит критерием появления отраженного сигнала. Как только дисперсия сигнала превысит заданный порог (отсчет 200), включается основной фильтр Калмана, который определяет частоту входного сигнала и выделяет из него гармоническую составляющую. Затем включается дополнительный фильтр Калмана (отсчет 250), который на основе известной частоты оценивает фазу гармонической составляющей относительно момента включения дополнительного фильтра.

Эта идея реализована в виде многоканального фильтра, обрабатывающего всю совокупность измерительных каналов и определяющего разности фаз между рабочими и опорными сигналами, которые поступают затем в алгоритм оценивания координат объекта. Рассмотрим более подробно реализацию этой идеи.

Математическая постановка задачи заключается в следующем. Имеются результаты измерений:

$$\begin{aligned} v_k[n] &= u_{0k} + u_{1k} \sin(\omega n + \varphi_k) + p_k[n], \\ \omega &= 2\pi fT, \quad k = \overline{1, q}, \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_{0k}$  — неизвестная постоянная составляющая сигнала,  $u_{1k}$  — неизвестная амплитуда гармонического сигнала, постоянная в пределах интервала оценивания,  $f$  — частота отраженного сигнала,  $T$  — период дискретизации,  $n$  — номер отсчета,  $\varphi_k \in (0, 2\pi)$  — фазы гармонических составляющих,  $p_k[n]$  — независимые по пространству и времени гауссовские шумы с нулевыми средними и известной дисперсией  $\sigma_p^2$ ,  $q$  — количество каналов,  $N$  — временной объем выборки. Диапазон возможных значений частоты  $f_{\min}, f_{\max}$  известен. Задача заключается в определении разности фаз между рабочими и опорными сигналами.

Задача определения разности фаз гармонических сигналов неизвестной частоты может быть решена методами спектрального оценивания с последующим выделением фазовых компонент [1]. Классические методы спектрального оценивания основаны на дискретном преобразовании Фурье. Присущие им особенности, связанные с растеканием спектра и пакетной обработкой данных, обусловили появление параметрических методов спектрального оценивания, обладающих более высоким разрешением и возможностью как пакетной, так и последовательной обработки. Первая группа параметрических методов использует авторегрессионные модели представления входных данных, вторая группа (методы Прони) использует детерминированные модели. Данная работа по характеру модели входных данных примыкает к авторегрессионным методам, однако решение задачи найдено на принципах калмановской фильтрации.

Идея подхода состоит в представлении гармонического сигнала как решения линейного разностного однородного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, корни характеристического уравнения которого расположены на окружности единичного радиуса.

Рассмотрим сначала один измерительный канал с сигналом на выходе:

$$v_n = u_0 + u_1 \sin(\omega n + \varphi) + p_n, \quad n = \overline{1, N}.$$

Будем предполагать, что постоянная составляющая  $u_0$  оценивается на начальном этапе интервала наблюдения и может быть устранена из результатов измерений. Для описания гармонической составляющей применим теорию разностных уравнений.

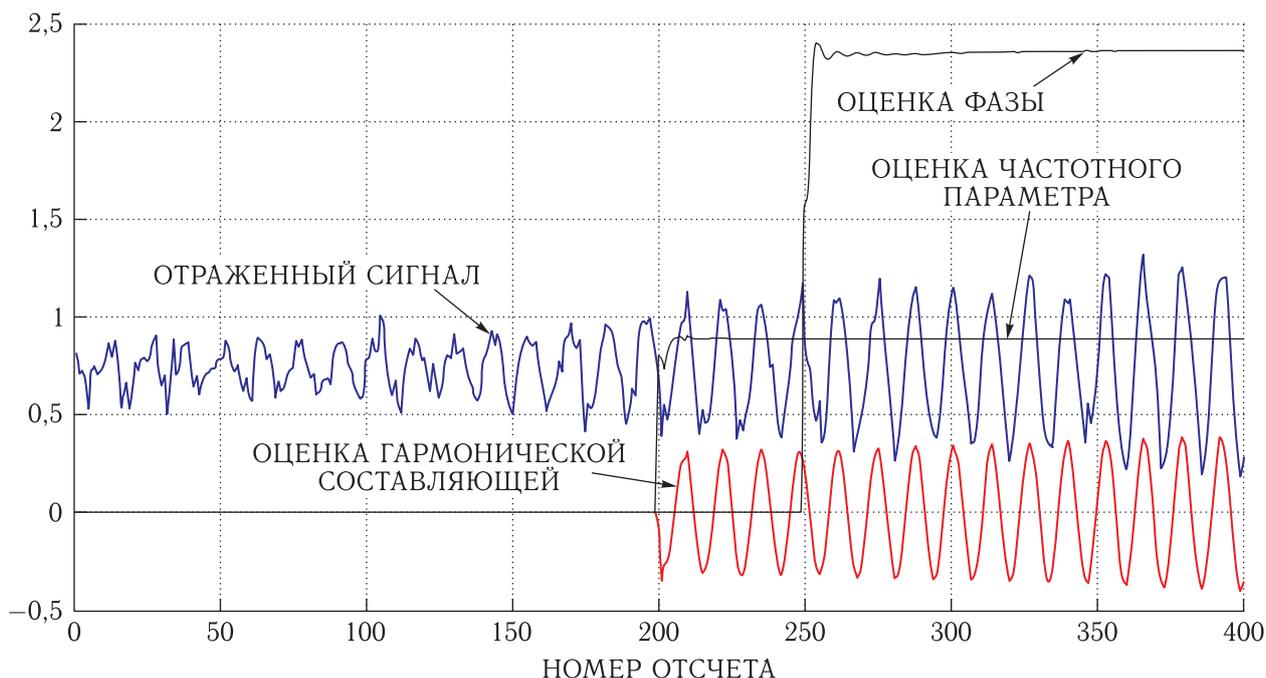


Рисунок. Оценка параметров отраженного сигнала на основе фильтра Калмана

Рассмотрим разностное уравнение

$$b_0 y[n + 2] + b_1 y[n + 1] + b_2 y[n] = 0. \quad (2)$$

Пусть соответствующее ему характеристическое уравнение  $b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = 0$  имеет пару комплексно-сопряженных корней  $z_1 = \alpha + j\beta$ ,  $z_2 = \alpha - j\beta$ . Тогда общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$y[n] = c_1 |z_1|^n \cos \omega n + c_2 |z_1|^n \sin \omega n, \quad \omega = \arg(z_1).$$

Постоянные  $c_1, c_2$  определяются начальными условиями  $y[0], y[1]$ . Если корни  $z_1, z_2$  расположены на единичной окружности, причем в правой полуплоскости, то решение примет вид:

$$\begin{aligned} y[n] &= c_1 \cos \omega n + c_2 \sin \omega n = u_1 \sin(\omega n + \varphi), \\ u_1 &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \varphi = \arctg(c_1/c_2), \\ \omega &= \arctg(\sqrt{1 - \alpha^2}/\alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

Характер расположения корней (левый или правый) определяется периодом дискретизации  $T$ . Единичным по модулю корням соответствует разностное уравнение

$$y[n + 2] - 2\alpha y[n + 1] + y[n] = 0.$$

Введем в рассмотрение переменные состояния

$$x_1[n] = y[n], \quad x_2[n] = y[n + 1],$$

которые позволяют записать исходное разностное уравнение в виде системы разностных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1[n + 1] = x_2[n], \\ x_2[n + 1] = -x_1[n] + 2\alpha x_2[n] \end{cases}$$

и уравнения выхода  $y[n] = x_1[n]$ . Представим эти результаты в векторно-матричной форме в виде уравнения состояния

$$\mathbf{X}[n + 1] = \mathbf{A}\mathbf{X}[n], \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

и уравнения выхода

$$y[n] = \mathbf{C}\mathbf{X}[n] + p[n], \quad \mathbf{C} = [1 \ 0].$$

Для оценивания вектора состояния применим фильтр Калмана [2], который в данных условиях определяется следующей совокупностью выражений:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n,n-1} &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{n-1}\mathbf{A}^T, \\ \mathbf{K}_n &= \mathbf{R}_{n,n-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{R}_{n,n-1}\mathbf{C}^T + \sigma_p^2)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_n &= \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}}_{n-1} + \mathbf{K}_n(v_n - \mathbf{C}\mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}}_{n-1}), \\ \mathbf{R}_n &= \mathbf{R}_{n,n-1} - \mathbf{K}_n\mathbf{C}\mathbf{R}_{n,n-1}.\end{aligned}\quad (4)$$

В этих соотношениях  $\widehat{\mathbf{X}}_n$  — оценка вектора состояния, вычисленная по наблюдениям  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ,  $\mathbf{R}_{n,n-1}$  — априорная ковариационная матрица ошибок оценивания,  $\mathbf{R}_n$  — апостериорная ковариационная матрица ошибок оценивания,  $\mathbf{K}_n$  — коэффициент усиления калмановского фильтра. Для работы фильтра нужно задать матрицу  $\mathbf{R}_0$  и вектор  $\widehat{\mathbf{X}}_0$ . Матрицу  $\mathbf{R}_0$  положим единичной,  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$ , вектор  $\widehat{\mathbf{X}}_0 = 0$ .

### Фильтр Калмана для оценивания частоты гармонического сигнала

Векторно-матричная модель наблюдений и соотношения фильтра Калмана предполагают известными параметры модели  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$ . Однако в данной задаче частота  $\omega$  гармонического сигнала и связанный с ней параметр  $\alpha$  являются неизвестными. Поставим задачу оценивания параметра  $\alpha$  одновременно с оцениванием вектора состояния, следуя работе [3].

Считая параметр  $\alpha$  постоянным на интервале наблюдения, зададим его решением простейшего разностного уравнения

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n.$$

Введем в рассмотрение расширенные векторы и матрицы

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_n^* &= \begin{bmatrix} \alpha \\ x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}^* &= [0 \quad 1 \quad 0].\end{aligned}$$

Расширенный вектор состояния описывается уравнением состояния

$$\mathbf{X}_{n+1}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{X}_n^* = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n^*),$$

которое теперь принимает нелинейный вид, обусловленный наличием параметра  $\alpha$  как в матрице  $\mathbf{A}^*$ , так и в векторе  $\mathbf{X}_n^*$ . Уравнение выхода остается линейным:

$$v_n = \mathbf{C}^*\mathbf{X}_n^* + p_n.$$

Решение задачи может быть найдено на основе линеаризации вектор-функции  $\mathbf{F}$  и последующим применением соотношений (4). Раскроем вектор-функцию  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_n^*) = \mathbf{A}^*\mathbf{X}_n^* = [\alpha; \quad x_2[n]; \quad -x_1[n] + 2\alpha x_2[n]]^T.$$

Найдем матрицу частных производных  $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}^*$ , используя правило дифференцирования вектор-функции по вектору:

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x_2 & -1 & 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Первая строка этой матрицы содержит частные производные от первого элемента вектор-функции  $\mathbf{F}$  по каждому элементу вектора  $\mathbf{X}^*$ . Другие строки матрицы соответствуют остальным элементам вектор-функции  $\mathbf{F}$ .

Уравнения фильтра Калмана теперь примут вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{n,n-1} &= \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^*}\mathbf{F}(\mathbf{X}_{n-1}^*) \right] \mathbf{R}_{n-1} \left[ \frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^*}\mathbf{F}(\mathbf{X}_{n-1}^*) \right]^T, \\ \mathbf{K}_n &= \mathbf{R}_{n,n-1}\mathbf{C}^{*T}(\mathbf{C}^*\mathbf{R}_{n,n-1}\mathbf{C}^{*T} + \sigma_p^2)^{-1}, \\ \widehat{\mathbf{X}}_n^* &= \mathbf{A}^*\widehat{\mathbf{X}}_{n-1}^* + \mathbf{K}_n(v_n - \mathbf{C}^*\mathbf{A}^*\widehat{\mathbf{X}}_{n-1}^*), \\ \mathbf{R}_n &= \mathbf{R}_{n,n-1} - \mathbf{K}_n\mathbf{C}^*\mathbf{R}_{n,n-1}, \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{I}, \quad \widehat{\mathbf{X}}_0^* = [\alpha_0 \quad 0 \quad 0].\end{aligned}\quad (5)$$

Начальное значение параметра  $\alpha = \alpha_0$  целесообразно назначить в середине диапазона изменения круговой частоты отраженного сигнала  $\omega_{\min}, \omega_{\max}$ .

Применение адаптивного фильтра Калмана к обработке реального входного сигнала показано на рисунке. Здесь первые 200 отсчетов потребовались для предварительной обработки входного сигнала, которая заключалась в вычислении постоянной составляющей и дисперсии входного сигнала с помощью «прыгающего» окна, содержащего 100 отсчетов. Во втором окне дисперсия превысила установленный порог в 0,01 и произошло включение фильтра Калмана (отсчет 200). Подчеркнем еще раз, что частота входного сигнала неизвестна; ее «представителем» является параметр  $\alpha$ , который оценивается фильтром одновременно с оценкой гармонической составляющей.

Точность оценивания частоты была найдена путем статистического моделирования на ЭВМ тестового сигнала

$$v[n] = u \sin(\omega n + \varphi) + p[n], \quad n = \overline{1, 200}$$

с параметрами  $u = 2$ ,  $\omega = 0,451$  ( $\alpha = 0,9$ ); фаза задавалась случайным равномерным образом в интервале  $[0, 2\pi]$ . Точность оценивания частоты определялась средней относительной ошибкой MAPE (Mean Absolute Percentage Error):

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\omega - \hat{\omega}_i}{\omega} \right| 100\%.$$

Для числа реализаций  $N = 1000$  получены следующие результаты:

- для дисперсии помехи  $\sigma_p^2 = 0,01$   $MAPE = 0,12\%$ ;
- для дисперсии помехи  $\sigma_p^2 = 0,05$   $MAPE = 0,82\%$ ;
- для дисперсии помехи  $\sigma_p^2 = 0,1$   $MAPE = 3,37\%$ .

Таким образом, адаптивный фильтр Калмана успешно решает задачу оценивания неизвестной частоты входного сигнала и выделения гармонической составляющей.

### Фильтр Калмана для оценивания фазы гармонического сигнала

Для определения фазы гармонической составляющей в сигнале представим гармонику уравнением (3), но с учетом того, что  $y[n] = x_1[n]$ , будем использовать оценку переменной состояния  $x_1[n]$ , которую выдает калмановский фильтр:

$$\hat{x}_1[n] = c_1 \cos \hat{\omega} n + c_2 \sin \hat{\omega} n + e[n]. \quad (6)$$

Здесь  $e[n]$  — погрешность оценивания, дисперсия которой содержится в ковариационной матрице  $\mathbf{R}_n$ ,  $\hat{\omega}$  — оценка частоты гармонического сигнала, вычисляемая по формуле

$$\hat{\omega} = \arctg(\sqrt{1 - \hat{\alpha}^2} / \hat{\alpha}).$$

Представим уравнение (6) совокупностью уравнений состояния и выхода. С этой целью введем пе-

ременные состояния  $q_1[n] = c_1$ ,  $q_2[n] = c_2$ , поведение которых зададим уравнением состояния

$$\mathbf{Q}[n + 1] = \mathbf{H}\mathbf{Q}[n], \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение выхода примет вид:

$$\hat{x}_1[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{Q}[n] + e[n], \quad \mathbf{C}[n] = [\cos \hat{\omega} n \quad \sin \hat{\omega} n].$$

Для оценивания вектора состояния  $\mathbf{Q}[n]$  будем использовать дополнительный фильтр Калмана, работа которого описывается соотношениями, аналогичными (4). Дополнительный фильтр включается после окончания переходного процесса основного фильтра, а оценка фазы производится в системе координат, совмещенной с моментом включения дополнительного фильтра. Так как в конечном счете нас интересует разность фаз между рабочими и опорным сигналами, то момент включения дополнительного фильтра, одинаковый во всех каналах, оказывается несущественным.

Совместная работа основного и дополнительного фильтров Калмана показана на рисунке. Дополнительный фильтр Калмана был включен через 50 отсчетов после включения основного фильтра и вычислил фазу гармонической составляющей в системе координат, совмещенной с отсчетом 250.

### Система многоканальных фильтров Калмана

Полученные результаты обобщаются на совокупность радиолокационных каналов, причем основной и дополнительный фильтры реализуются не в виде набора одноканальных фильтров Калмана, а в виде многомерных фильтров, оперирующих с расширенными векторами состояния.

### Список литературы

1. Марпл С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
3. Чураков Е. П. Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике. М.: Финансы и статистика, 2004.